ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 7 NOVEMBRE 1921.

PRÉSIDENCE DE M. GEORGES LEMOINE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

PSYCHOLOGIE. — *Une illusion optique dans l'appréciation de la vitesse.* Note de M. **Charles Richet.**

Sans avoir la prétention injustifiée d'entrer le moins du monde dans l'étude de la relativité, je voudrais montrer à quel point nos appréciations sont défectueuses quand nous n'avons d'autre mode de jugement que la perception sensorielle non rectifiée.

Nous apprécions en général notre vitesse dans l'espace par la rapidité avec laquelle se déplacent les objets par rapport à nous.

Quand on est en bateau ou en chemin de fer, — si, bien entendu, on ne tient pas compte de la trépidation et du vent, — selon qu'on voit fuir les objets attachés au sol avec plus ou moins de rapidité, c'est la fuite plus ou moins précipitée de ces objets fixes qui nous donne la notion de notre vitesse personnelle. Aussi bien, quand on est en bateau par un temps calme, et qu'on se met à l'abri du vent, en regardant la rapidité avec laquelle l'écume blanche court le long du vaisseau, se fait-on quelque idée de la marche plus ou moins rapide du navire.

Or on peut regarder cette fuite de l'écume, indice de la vitesse, dans trois conditions différentes :

α. En étant immobile, accoudé au bastingage;

β. En marchant rapidement sur le pont dans le même sens que l'avance du bateau;

γ. En marchant rapidement sur le pont dans un sens inverse à l'avance du bateau.

La notion à peu près exacte de la vitesse nous est donnée quand nous

sommes immobiles. Mais, si nous marchons sur le pont, l'appréciation change complètement et devient très défectueuse.

Si l'on marche (β) dans le même sens que le bateau, il est clair qu'à la vitesse V du bateau vient s'ajouter la vitesse v de notre marche : notre vitesse totale, par rapport à la mer, est alors $V + v$.

Au contraire, si nous marchons en sens inverse (γ), notre vitesse totale, par rapport à la mer, sera $V - v$.

Il s'ensuit qu'en marchant sur le pont dans le même sens que l'avance du navire, on avance plus vite (par rapport à la mer) qu'en marchant en sens inverse. Par conséquent la vitesse du navire devrait paraître plus grande. Mais de fait c'est le contraire qu'on croit constater. Et c'est d'une netteté extrême.

La vitesse du navire paraît incontestablement plus grande quand, marchant sur le pont, on a la vitesse $V - v'$ *que quand on a la vitesse* $V + v'$.

Cette différence paraît d'autant plus accentuée qu'on marche ou qu'on court plus vite sur le pont.

C'est un très singulier paradoxe qui montre l'absolue relativité de notre appréciation des vitesses.

Il s'agit de savoir pour quelle cause.

Il m'a semblé qu'on pouvait admettre l'interprétation suivante :

Quand, sur terre ferme, nous marchons sur le sol, nous voyons le sol fuir sous nos yeux; mais cela ne nous donne nullement l'idée que le sol se déplace. Nous sommes habitués à cette fuite du sol dans le sens de notre marche, de sorte que nous corrigeons tant bien que mal ce déplacement v en lui enlevant une vitesse d'appréciation v'. Et alors finalement le sol nous semble à peu près immobile, puisque nous faisons $v' = v$.

Si cette correction était parfaite, si v' était toujours égal à v, il s'ensuivrait que la vitesse du navire nous paraîtrait à peu près toujours la même, dans les trois conditions α, β, γ, et notre appréciation de la vitesse ne se modifierait pas, puisque v' annulerait toujours v.

Mais *la correction n'est pas parfaite,* et nous avons tendance à faire v' beaucoup plus grand que v. Alors $v' - v$ devient une quantité positive x, de sorte que nous aurons, en apparence,

Pour α	V
Pour β	$V - x$
Pour γ	$V + x$

Voilà pourquoi, en marchant sur le pont d'un navire en sens inverse du bateau, on croit irrésistiblement progresser plus vite (par rapport à la mer) que si l'on marche dans le même sens que l'avance du navire.

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur la détermination du degré d'oxydation des charbons.* Note (¹) de MM. **Georges Charpy** et **Gaston Decorps.**

Divers travaux ont été publiés déjà sur l'altération de la houille par absorption d'oxygène à basse température, notamment par MM. Fayol, Malher, Boudouard, Charpy et Godchot, et ont fait ressortir l'importance pratique de ce phénomène en raison des modifications qu'il produit dans la valeur du pouvoir calorifique des charbons et surtout dans leur aptitude à la cokéfaction. Dans une Note présentée à l'Académie en 1917 (²) l'un de nous, en collaboration avec M. Godchot, a montré que l'oxydation ne modifiait pas systématiquement les teneurs en cendres et en matières volatiles et n'était, par conséquent, pas mise en évidence par les résultats des procédés d'analyse rapide couramment employés pour caractériser les charbons.

D'après de nouveaux essais auxquels nous avons procédé, et qui comprennent notamment des expériences d'oxydation en vase clos, permettant l'examen des gaz résiduels, il semble que l'oxydation puisse comporter deux réactions distinctes, agissant différemment sur les grandeurs mesurées; d'une part, il peut y avoir fixation directe de l'oxygène sur le charbon, ce qui produit une augmentation de poids total, une augmentation de la teneur en matières volatiles et une diminution de la teneur en cendres; d'autre part, l'oxygène peut former avec le carbone une certaine quantité d'anhydride carbonique qui se dégage, peut-être aussi, avec l'hydrogène, une certaine quantité d'eau qui se sépare dans les essais à chaud, ce qui produit une diminution du poids total, une légère réduction de la teneur en matières volatiles et une augmentation de la teneur en cendres. Suivant la nature des charbons et les conditions de l'expérience, l'importance relative de ces deux réactions se trouve modifiée et l'on a, par suite, des variations de sens contraire dans les résultats de l'analyse.

Quand l'oxydation a lieu à basse température, il semble que c'est la première réaction qui joue le rôle le plus important; c'est elle qui donne naissance aux produits solubles dans la soude avec coloration brune sur l'existence desquels on se base généralement pour constater l'état d'oxydation d'un charbon. Nous nous sommes proposé de chercher une méthode qui permît de définir par un chiffre la quantité de ces produits existant dans un

(¹) Séance du 2 novembre 1921.

(²) *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 106.

charbon donné. Après divers essais, portant notamment sur les procédés colorimétriques qui ne nous ont pas paru donner des résultats suffisamment constants, nous avons adopté une méthode dans laquelle les matières dissoutes sont oxydées par une liqueur titrée de permanganate de potassium.

Le charbon à étudier est pulvérisé et tamisé, puis traité par une solution de soude à 50 pour 100 (10^{cm^3} pour 1^g de charbon, chauffage pendant 2 heures à 100°). La solution, étendue d'eau et filtrée, est acidulée par l'acide sulfurique et ramenée à un volume déterminé. Sur une quantité de ce liquide plus ou moins grande suivant la coloration, on fait agir pendant 2 heures à froid une solution titrée de permanganate de potassium ajoutée en excès de façon que la coloration reste nettement rose; on titre ensuite le permanganate en excès avec une solution de sel de Mohr. On peut déterminer ainsi un chiffre représentant la quantité d'oxygène nécessaire pour oxyder la matière organique soluble dans la soude et dont la proportion augmente manifestement avec l'état d'oxydation de la houille. Ce chiffre n'a évidemment qu'une valeur empirique, mais donne une indication qui paraît suffisante pour la pratique. Nous proposons de l'appeler *indice d'oxydation* du charbon considéré et de l'exprimer en grammes d'oxygène (nécessaire à l'oxydation) par kilogramme de charbon.

L'indice ainsi déterminé est généralement très faible pour les charbons susceptibles de donner du coke résistant : souvent inférieur à l'unité, il ne dépasse qu'exceptionnellement le chiffre 2; pour d'autres charbons, on obtient des chiffres notablement plus élevés, mais ils ne peuvent fournir de coke, et quand un charbon de bonne qualité est conservé trop longtemps à l'air, son pouvoir cokéfiant diminue en même temps que son indice d'oxydation augmente.

Si donc la faible valeur de l'indice d'oxydation n'est pas une condition suffisante pour caractériser un charbon à coke, on peut dire, croyons-nous, que c'est une condition nécessaire. La limite qu'il convient de ne pas dépasser varie évidemment avec la nature du charbon et il faudra la déterminer dans chaque cas par des expériences spéciales, mais on peut dire, dès maintenant, qu'une valeur supérieure à 5 ou 6 unités doit éveiller l'attention, et faire considérer le charbon qui la fournit comme suspect.

Nous nous sommes proposé de suivre, par le procédé indiqué plus haut, la marche de l'oxydation des charbons en la poussant beaucoup plus loin que cela n'a lieu d'ordinaire.

Les graphiques des figures 1 et 2 donnent, à titre d'exemple, les résul-

tats observés dans une série d'essais effectués à la température de 150° sur deux charbons, l'un de provenance anglaise, marqué A (*fig.* 1), l'autre venant d'une mine du nord de la France, marqué B (*fig.* 2).

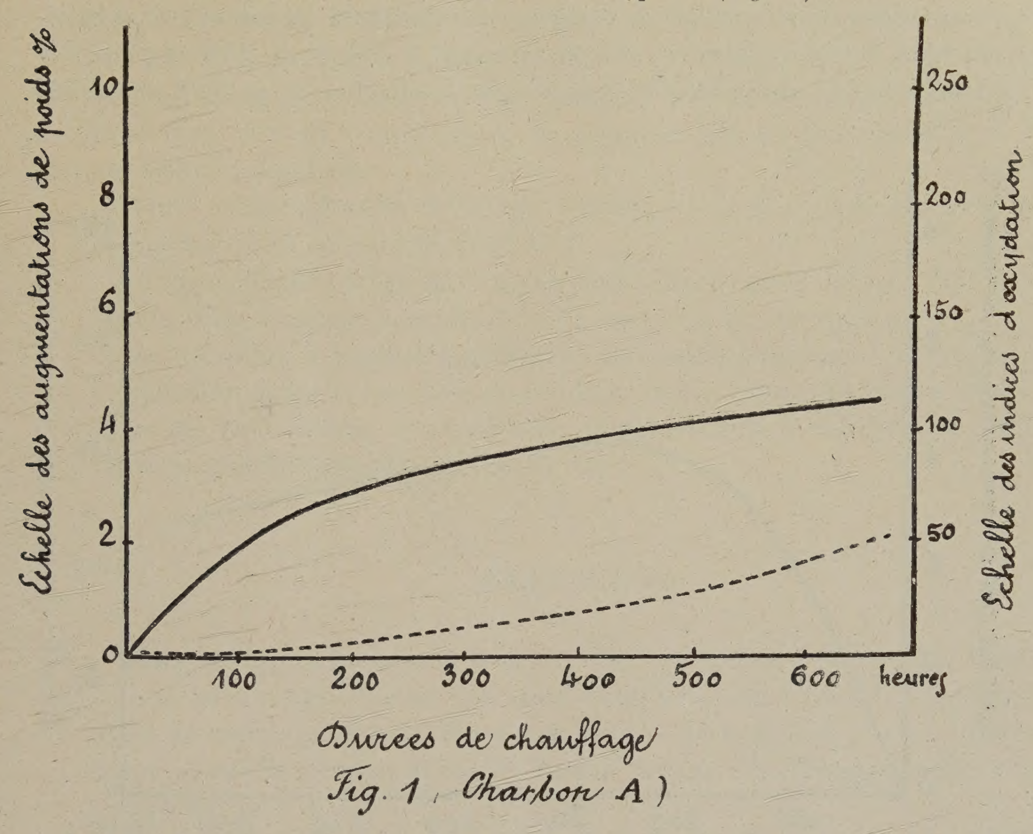


Fig. 1 (Charbon A)

Les courbes en traits pleins donnent en fonction du temps la variation du poids du charbon; les courbes en traits pointillés donnent les variations de l'indice d'oxydation.

On voit que, pour le charbon anglais, le poids augmente dès le début, indiquant une fixation d'oxygène sur le charbon; mais cet accroissement est de moins en moins rapide et, au bout de 450 heures environ, le poids reste constant; l'augmentation totale ayant été de 4,30 pour 100 environ, l'indice d'oxydation augmente d'une façon continue et avec une vitesse croissante. Après 600 heures de chauffage (limite du graphique), l'augmentation de poids était de 4,30 pour 100 et l'indice, primitivement égal à 0,15, avait atteint le chiffre de 55; après 2000 heures de chauffage, le poids était resté sensiblement constant et l'indice avait atteint la valeur de 270.

Pour le charbon du Nord, on observe les mêmes particularités au début, quoique avec des variations beaucoup plus rapides; mais au bout de 220 heures environ, le poids qui s'était accru jusque-là de 6,75 pour 100 environ cesse de s'accroître et commence à diminuer lentement et régulièrement; l'indice, pendant ce temps, continue à croître de plus en plus; il y a donc à la fois absorption d'oxygène par le charbon et perte de matières

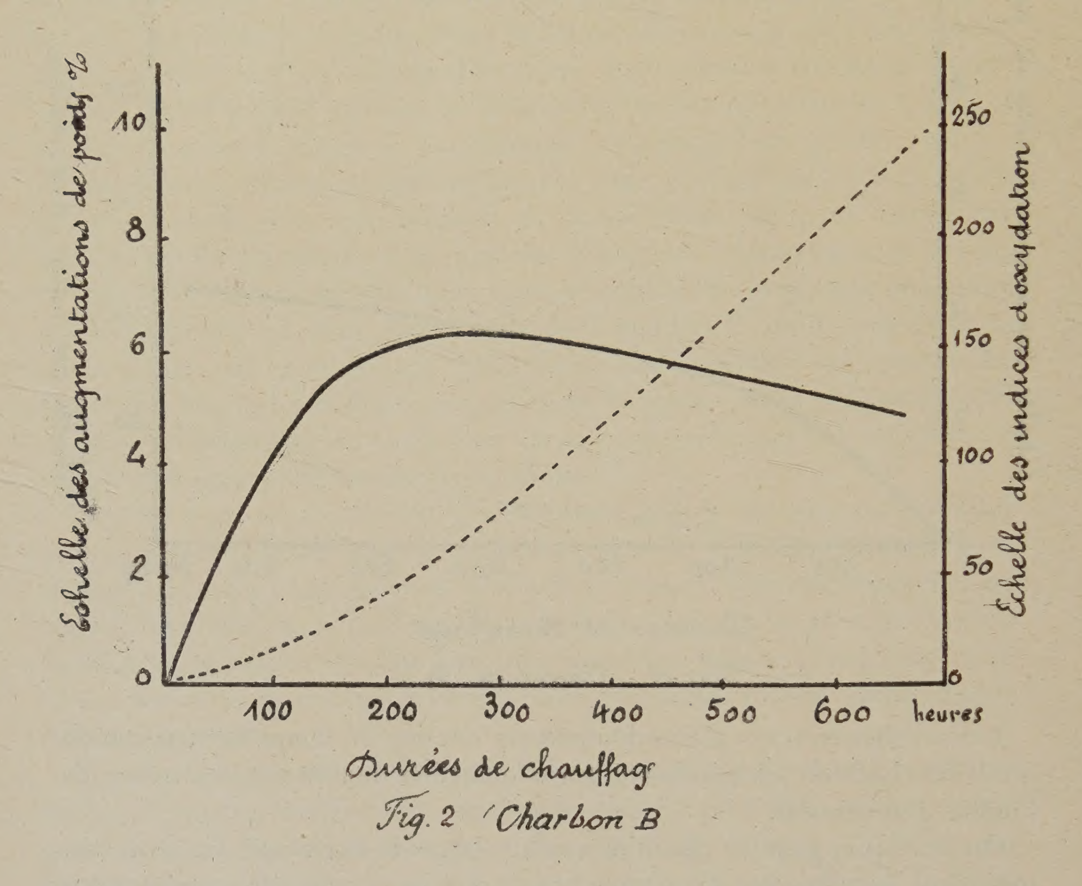


Fig. 2 (Charbon B

volatiles; après 1300 heures de chauffage, le poids s'est rapproché beaucoup de sa valeur primitive qu'il dépasse seulement de 1,4 pour 100 et l'indice d'oxydation est égal à 720; après 2000 heures de chauffage, le poids est légèrement inférieur à sa valeur primitive, l'indice a atteint le chiffre de 860; à ce moment le charbon est devenu, à très peu de chose près, *intégralement soluble dans la solution de soude*.

Ce résultat, assez imprévu et sur lequel nous comptons revenir, est à rapprocher de celui qui a été signalé par M. Godchot dans une Note

récente ([1]), dans laquelle il montre que l'oxygène se fixe aussi bien sur la partie de la houille qui est soluble dans la pyridine que sur la partie insoluble.

Des expériences analogues, effectuées à la température de 100°, donnent des variations de même nature, quoique beaucoup moins rapides; de plus, le charbon B se comporte, au point de vue de la variation de poids, comme le charbon A, c'est-à-dire que le poids devient sensiblement constant au bout d'un certain temps, mais ne présente pas de décroissance si l'on continue le chauffage.

Après 1300 heures de chauffage, l'indice d'oxydation est égal à 7,8 pour le charbon A, à 48 pour le charbon B.

Le procédé de titrage que nous avons indiqué pour définir l'état d'oxydation d'un charbon permet donc de suivre le développement graduel de cette altération à basse température; son emploi conduit à constater que l'oxydation peut devenir très profonde et arrive même, au moins dans certains cas particuliers, à transformer intégralement le charbon en matière humique soluble dans la solution de soude ([2]).

ÉLECTIONS.

Dans la formation d'une liste de deux candidats à la place de Membre artiste, vacante au Bureau des Longitudes par le décès de M. *J. Carpentier*, pour la première ligne, M. **Jobin** obtient 38 suffrages contre 1 bulletin blanc; pour la seconde ligne, M. **Leroy** obtient 36 suffrages contre 1 bulletin blanc.

En conséquence, la liste présentée à M. le Ministre de l'Instruction publique comprendra :

En première ligne . . . . M. **Jobin**
En seconde ligne . . . . M. **Leroy**

Dans la formation d'une liste de deux candidats à la place de Membre titulaire, vacante au Bureau des Longitudes par le décès de M. *G. Lippmann*, pour la première ligne, M. **R. Bourgeois** obtient 32 suffrages contre 3 à M. *J. Violle* et 2 à M. *R. Villard;* pour la seconde ligne, M. **P. Villard**

([1]) *Comptes rendus*, t. 171, 1920, p. 32.

([2]) Les indices d'oxydation trouvés sur divers lignites sont relativement très élevés; ceux que nous avons déterminés ne descendent pas au-dessous de 40, mais aucun n'est supérieur à 150.

obtient 28 suffrages contre 4 à M. *J. Violle*, 1 à M. *Branly* et 1 à M. *D. Berthelot*.

En conséquence, la liste présentée à M. le Ministre de l'Instruction publique comprendra :

En première ligne . . . . M. R. **Bourgeois**
En seconde ligne . . . . M. P. **Villard**

COMMISSIONS.

MM. **d'Arsonval**, **Painlevé**, **Douvillé**, **Le Chatelier**, **Moureu**, **Rateau**, **Daniel Berthelot** sont désignés, à la majorité des suffrages, pour constituer, joints aux membres du Bureau, la Commission chargée de choisir un candidat pour le prix *Le Conte*.

PLIS CACHETÉS.

L'Académie est informée de la mort, survenue à Laon le 26 octobre 1921, de M. **Paul-Marguerite de la Charlonie**, dont quatre plis cachetés déposés le 1er sous le n° 7198 le 18 mars 1907, le 2e sous le n° 8126 le 5 janvier 1914, le 3e sous le n° 8718 le 22 décembre 1919, le 4e sous le n° 8925 le 17 octobre 1921, doivent être ouverts après ses obsèques.

Ces plis, ouverts en séance par M. le Président, sont remis entre les mains des Secrétaires perpétuels qui feront le nécessaire.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° P. Zeemann. *Verhandelingen over Magneto-Optische Verschijnselen.*

2° Le fascicule 18, 2e partie, des *Études de Lépidoptérologie comparée*, par Charles Oberthür. (Présenté par M. E.-L. Bouvier.)

3° *Suppression expérimentale de l'inimitié entre Fourmis*, par Mme Marguerite Combes. (Présenté par M. E.-L. Bouvier.)

M. **J. Andrade**, élu Correspondant pour la Section de Mécanique, adresse des remercîments à l'Académie.

M. F. **Blanchet** adresse des remercîments pour la subvention qui lui a été accordée sur le *Fonds Bonaparte*.

M. *L. Barbillion*, au nom de la **Société des Amis du Laboratoire des essais mécaniques et métallurgiques de Grenoble**, adresse des remercîments pour la subvention qui lui a été accordée sur la *Fondation Loutreuil*.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une classe d'équations fonctionnelles.* Note de M. **Gaston Julia**.

I. A toute fonction rationnelle R(Z) ayant à l'origine un point double répulsif, $|R'(0) = s| > 1$, correspond une fonction méromorphe $f(z)$ telle que

$$f(sz) = R[f(z)], \qquad f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1.$$

On peut généraliser le problème et chercher, R_1 et R_2 étant deux fractions rationnelles de Z, s'il existe une fonction analytique G(Z) telle que

$$G[R_1(Z)] = R_2[G(Z)]. \tag{1}$$

J'appellerai E'_{R_1} l'ensemble parfait des points Z où la famille des $R_1^{(n)}$ itérées de R_1 n'est pas normale, et E'_{R_2} l'ensemble analogue pour R_2.

Si $R_1 = R_2$ [1], G *est permutable à* R_1; si $R_1 \neq R_2$, G est semi-permutable à (R_1, R_2). En remplaçant au besoin R_1 par une de ses itérées, ce qui ne restreint pas la généralité, on peut supposer que R_1 a un point double répulsif à l'origine. Et en remplaçant G par $G - \alpha$ si cela est nécessaire, on pourra supposer que l'origine est point double de R_2. On peut supposer que G est holomorphe en o, sans restreindre la généralité, car, *à moins que* G *n'admette pour points singuliers essentiels tous les points de* E'_{R_1}, on pourra toujours choisir dans E'_{R_1} un point double répulsif d'une itérée $R_1^{(\lambda)}$, où G soit holomorphe : c'est ce point double qu'on choisirait pour origine. A supposer que G existe et est holomorphe autour de o, on démontre que o *est aussi répulsif pour* R_2. Si s_1 et s_2 sont les valeurs de $R'_1(0)$ et $R'_2(0)$,

---

[1] La recherche présente contient donc celle des fonctions permutables à une substitution rationnelle R_1 et n'admettant pas tous les points de E'_{R_1} pour points singuliers essentiels. J'ajoute que des cas particuliers de l'équation (1) ont été étudiés par M. P. Fatou (*Bull. Soc. math. Fr.*, 1920).

$|s_1|$ et $|s_2|$ sont > 1 et l'on a $s_2 = s_1^k$ en supposant autour de o

$$G(Z) = g_k Z^k + \ldots \qquad (k \text{ entier} > 0). \tag{2}$$

Si $\Gamma_1(z)$ et $\Gamma_2(z)$ sont les fonctions fondamentales de R_1 et R_2,

$$\Gamma_1(s_1 z) = R_1[\Gamma_1(z)], \qquad \Gamma_1(0) = 0, \qquad \Gamma'_1(0) = 1,$$
$$\Gamma_2(s_2 z) = R_2[\Gamma_2(z)], \qquad \Gamma_2(0) = 0, \qquad \Gamma'_2(0) = 1,$$

on démontre que toute solution G de (1), holomorphe en o et dont le développement (2) débute par $g_k Z^k$ est donnée par

$$G_{g_k}(Z) = \Gamma_2[g_k \{\gamma_1(Z)\}^k]; \tag{3}$$

elle dépend de l'entier positif arbitraire K et du coefficient arbitraire g_k, et $z = \gamma_1(Z)$ est la fonction inverse de la fonction $Z = \Gamma_1(z)$; on voit que la formule (3) donne des solutions de (1) holomorphes en o.

II. G(Z) étant supposé holomorphe en o se trouve *définie par* (3) *dans tout le plan*, et c'est une fonction en général multiforme à une infinité de branches, dont la surface de Riemann est celle sur laquelle la fonction inverse de $\Gamma_1(z)$ est uniforme. G a donc des points critiques algébriques et des points transcendants qui sont en général ceux de $\gamma_1(Z)$, lesquels sont bien connus. En tout point Z, qui n'est pas une valeur exceptionnelle de $\Gamma_1(z)$, G(Z) a au moins une branche méromorphe ou algébrique. En un point Z qui est valeur exceptionnelle de $\Gamma_1(z)$, toute branche de $\gamma_1(Z)$ devient infinie et a un point critique transcendant, donc G(Z) a en général en ce point un point critique transcendant ou un point singulier essentiel ou les deux à la fois. Si $R_1(Z)$ n'est pas la transformée homographique d'un polynome ou de $Z^{\pm p}$, Γ_1 n'a pas de valeur exceptionnelle; si R_1 se ramène à un polynome différent de Z^p, Γ_1 a une valeur exceptionnelle; si R_1 se ramène à $Z^{\pm p}$, il y a deux valeurs exceptionnelles.

Il arrivera, en général, qu'un pareil point exceptionnel Z soit à la fois point critique transcendant et point d'indétermination complète de G(Z). Exemple :

$$R_1 = Z^2; \qquad R_2 = 2Z^2 - 1; \qquad G(Z) = \cos i\sqrt{2 \log Z}$$

en posant $k = 1$, $g_k = 1$, le point double répulsif étant $Z = 1$; car

$$\Gamma_1 = e^z, \qquad \Gamma_2 = \cos i\sqrt{2z}.$$

G a en o et ∞ deux points *critiques transcendants* et *essentiels*.

III. L'équation (1) a-t-elle des solutions *uniformes dans tout le plan?*

Si l'on suppose qu'une pareille solution G n'admet pas pour points singuliers essentiels tous les points de E'_{R_1}, les raisonnements de I et II prouvent que G est partout *méromorphe* dans le plan, sauf peut-être aux points qui sont des valeurs exceptionnelles de $\Gamma_1(z)$, c'est-à-dire valeurs exceptionnelles dans l'itération de $R_1(Z)$.

Il y a donc trois cas :

1° R_1 ne se ramène ni à $Z^{\pm p}$ ni à un polynome. G est méromorphe partout. C'est une *fraction rationnelle*. Toute solution uniforme de (1) *sera rationnelle*, ou *admettra tous les points de* E'_{R_1} *pour points singuliers essentiels*.

2° R_1 se ramène à $Z^{\pm p}$ par une même substitution homographique sur Z et $R_1(Z)$. Toute solution uniforme de (1) :

a. Ou bien admet *tout point de* E'_{R_1} *comme point singulier essentiel;*

b. Ou bien est *rationnelle;*

c. Ou bien admet *les points* o *et* ∞ (*points exceptionnels de* R_1) *pour seuls points singuliers essentiels*. Il est remarquable dans ce cas *c* que si l'un des points o ou ∞ cesse d'être essentiel, l'autre cesse de l'être aussitôt et la solution devient rationnelle. *Dans ce cas*, G, lorsqu'elle n'est pas rationnelle, *est toujours d'ordre nul.* On forme un exemple simple avec $R_1 = Z^p$, $\Gamma_1(z) = e^z$, point double $Z = 1$, en prenant $\Gamma(z) = p(z + \pi i)$ [$p(z)$ fonction elliptique de Weierstrass aux périodes $2\pi i$, a], ce qui donne $\Gamma(z) = A_0 + A_1 z^2 + \ldots$, puis $\gamma(z) = \frac{\Gamma(z)}{A_0} = 1 + \mu z^2 + \ldots$; on prendra $\Gamma_2(z) = \gamma\left[\sqrt{\frac{z}{\mu}}\right]$ et l'on aura $\Gamma_2[zK^2] = R_2[\Gamma_2(z)]$, R_2 étant rationnelle, avec $Z = 1$ pour point répulsif. Alors avec $K = 2$ et $g_K = \mu$, on aura $G[Z] = \frac{1}{A_0}\cdot\Gamma[\log Z]$, $G(Z)$ est uniforme et o et ∞ sont ses deux points singuliers essentiels.

En prenant $R_1 = Z^2$, $R_2 = 2Z^2 - 1$, $K = 2$, $g_K = \frac{1}{2}$, on a $G = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right)$ qui est rationnelle.

3° Si R_1 se ramène à un polynome $P(Z)$, toute solution uniforme de (1) :

a. Ou bien *admet tout point de* E'_{R_1} *pour point singulier essentiel;*

b. Ou bien est *rationnelle;*

c. Ou bien est une *fonction méromorphe d'ordre nul*.

Voici un exemple de ce dernier cas :

Je prends $P(Z) = 2Z^2 - 1$; $Z = 1$ est point double répulsif $\Gamma_1(z) = \cos i\sqrt{2z}$ à partir de la fonction $p(u)$ de Weierstrass, aux périodes 2π, a, je pose

$$\Gamma(z) = p(z + \pi) = A_0 + A_1 z^2 + \ldots, \qquad \gamma(z) = \frac{1}{A_0}\Gamma(z) = 1 + \mu z^2 + \ldots.$$

et je prends

$$\Gamma_2(z) = \gamma\left[\sqrt{\frac{z}{\mu}}\right].$$

Quel que soit λ, entier positif, on a $\Gamma_2(\lambda^2 z)$ rationnellement en $\Gamma_2(z)$. Je choisis $\lambda = 2$; $\Gamma_2(4z) = R_2[\Gamma_2(z)]$ et R_2 admet $Z = 1$ pour point répulsif. Je prends cette fois $K = 1$, $g_K = -2\mu$. Alors $G(Z) = \frac{1}{A_0}\Gamma(\text{arc} \cos Z)$; $G(Z)$ est bien méromorphe dans tout le plan et non rationnelle.

Tout ceci peut être encore notablement précisé, comme on le verra prochainement, grâce à l'introduction d'une notion nouvelle qui généralise mes travaux antérieurs sur les fonctions entières et méromorphes.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur certaines équations intégrales possédant une infinité de solutions avec un nombre illimité de paramètres arbitraires.* Note de M. **Henri Villat.**

Dans ma Thèse (¹) la détermination, pour le cas de deux dimensions, du mouvement d'un fluide autour d'un solide de forme donnée à l'avance a été étudiée. J'ai montré que le problème dépendait de la solution d'une certaine équation intégrale (²). J'ai formé ailleurs les équations qui jouent le même rôle dans diverses conditions de limitation pour le fluide, et j'ai indiqué comment on pouvait pratiquement obtenir de bonnes approximations de *la* solution qui convient à ces équations pour les problèmes envisagés. Étant revenu sur la recherche de la solution théorique exacte, j'ai été amené à constater que les équations en question jouissent de propriétés curieuses, qui n'en facilitent pas l'intégration. Bien que, du point de vue hydrodynamique, il y ait une solution bien déterminée convenant à chaque problème, *ces équations possèdent une infinité de solutions dépendant d'autant de constantes arbitraires que l'on veut.* C'est ce que je crois intéressant de noter ici, pour préciser, sur l'exemple ci-dessous, cas particulier d'un des problèmes cités plus haut, et pour lequel on peut expliciter les calculs.

Considérons, dans l'intervalle $0, 2\omega_1$, l'équation intégrale

$$(1) \quad \int_0^{2\omega_1} [F(\beta) - F(\alpha)]\zeta(\alpha-\beta)\,d\beta + 2\eta_1(\alpha-\omega_1)F(\alpha) = \pi\log|F'(\alpha)| + \pi\log(p\alpha - e_3) + A,$$

(¹) *Annales de l'École Normale*, 1911, p. 203.

(²) *Loc. cit.*, p. 284.

dans laquelle A est une constante donnée, F la fonction inconnue, F′ sa dérivée, ζ et p les fonctions elliptiques habituelles. On peut montrer que cette équation admet la solution suivante :

$$F(\alpha) = \frac{\pi\alpha}{\omega_1} + \operatorname{arc\,tang} \frac{\lambda^2 \cos\frac{2\pi\alpha}{\omega_1} - 2\lambda \sin\frac{\pi\alpha}{\omega_1} - 1}{2\lambda\cos\frac{\pi\alpha}{\omega_1}\left(1 + \lambda\sin\frac{\pi\alpha}{\omega_1}\right)} + C,$$

C et λ étant deux constantes, avec une arbitraire.

Voici, par ailleurs, une solution avec trois constantes arbitraires :

$$F(\alpha) = -2\arg z - \pi - \delta$$

avec

$$z = a + ib + c\int_0^\alpha \frac{\sigma_3(\alpha)\,\sigma_3(\alpha - \gamma_0)}{\sigma^2(\alpha - \gamma_1)}\, e^{-2\eta_1\left(1+\frac{\delta}{\pi}\right)\alpha}\, d\alpha;$$

a, b, c, δ, γ_0, γ_1 sont des constantes réelles, liées par les relations

(2) $$\mathfrak{S}_5\left(\frac{\gamma_1}{2\omega_1}\right)\mathfrak{S}'_4\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_0}{2\omega_1}\right) + \mathfrak{S}'_4\left(\frac{\gamma_1}{2\omega_1}\right)\mathfrak{S}_4\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_0}{2\omega_1}\right) = 0,$$

(3) $$\gamma_1 - \frac{\gamma_0}{2} = \omega_1 + \frac{\omega_1\delta}{\pi},$$

et par une autre plus compliquée, que je ne transcris pas ici. δ est supposé $\neq 0$; s'il est nul, ce qui précède subsiste, en remplaçant la relation (2) par cette autre :

$$\omega_1 p(\gamma_1 + \omega_3) + \eta_1 = 0.$$

On peut maintenant former de nouvelles solutions dépendant d'un nombre quelconque de paramètres, par l'intermédiaire de certaines fonctions thêta-kleinéennes (ou, par exception, fuchsiennes); la construction s'effectue en posant

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{z - z_k} - \sum_1 \frac{1}{\xi' - z'_k}\frac{d\xi'}{dz} + \sum_2 \frac{1}{\xi - z_k}\frac{d\xi}{dz} - \ldots;$$

les lettres accentuées désignent les imaginaires conjuguées des lettres sans accent; les sommes Σ sont étendues aux points ξ (ou ξ') que l'on obtient par inversions successives effectuées sur le point z par rapport à un certain groupe de circonférences, dont chacune introduit *au plus deux* paramètres nouveaux, et peut les introduire en effet. En choisissant pour z_k ($k \neq 0$) les centres des susdites circonférences, la fonction

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \lambda_1\Phi_1(z) + \ldots + \lambda_p\Phi_p(z)$$

permet de définir une solution de (1) dépendant de p' constantes ($p' \leqq 2p$, l'égalité étant toujours possible). Il ne saurait s'agir d'expliciter ici les calculs.

On obtient ainsi *toutes* les solutions de (1).

D'où la conclusion énoncée au début.

Une conclusion analogue est valable pour toutes les équations intégrales de la provenance indiquée plus haut, et qui rentrent toutes dans la forme

$$(4) \qquad \int_0^L [F(\alpha) - F(\beta)] N(\alpha, \beta)\, d\beta + G(\alpha) F(\alpha) = \log |F'(\alpha)| + H(\alpha),$$

où N, G, H sont trois fonctions données, dont la première devient infinie comme $\frac{1}{\alpha - \beta}$ pour $\alpha = \beta$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le développement d'une fonction arbitraire en série suivant une suite de fonctions données.* Note [1] de M. **Kyrille Popoff**, présentée par M. Hadamard.

Soit

$$v_1(x), \quad v_2(x), \quad \ldots, \quad v_i(x)$$

une suite de fonctions continues orthogonales et normales dans l'intervalle (a, b), c'est-à-dire telles que l'on ait

$$\int_a^b v_i(x) v_k(x)\, dx = 0, \qquad \int_a^b v_i(x)^2\, dx = 1 \qquad (i \neq k).$$

Nous supposerons que toute fonction $F(x)$ ayant une dérivée peut être développée en série suivant les fonctions $v_i(x)$, d'après la formule

$$(1) \qquad F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(x) \int_a^b F(t) v_i(t)\, dt = \sum_i v_i(x) \int_a^b F(t)\, d\int_a^t v_n(s)\, ds.$$

Nous nous proposons de déduire de (1) un développement de la même fonction $F(x)$ suivant une autre suite de fonctions quelconques

$$\psi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty)$$

ou du moins de chercher les conditions dans lesquelles cela est possible.

(1) Séance du 2 novembre 1921.

Plus généralement, nous supposerons que toute fonction $F(x)$ qui admet des dérivées jusqu'au $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre (n pouvant être nul) est développable en série suivant les $v_i(x)$ d'après la formule (1). En intégrant par parties n fois de suite et en appliquant après chaque intégration par parties la formule (1), on obtient

$$(2)\qquad \begin{aligned} F(x) - F(b) - \frac{(x-b)}{1!}F'(b) - \ldots - \frac{(x-b)^n}{n!}F^{(n)}(b) &= -\sum_i v_i(x)\int_a^b \frac{F^{(n+1)}(t)}{n!}\left[\int_a^t (s-t)^n \; v_i(s)\,ds\right]dt \\ &= \sum_i v_i(x)\int_a^b \frac{F^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}\, d\int_a^t (s-t)^{n+1} v_i(s)\,ds. \end{aligned}$$

Nous chercherons à déterminer une fonction $f(x)$ telle que l'on ait

$$(3)\qquad \begin{aligned} R_n(x) = F(x) - F(b) - \frac{(x-b)}{1!}F'(b) - \ldots - \frac{(x-b)^n}{n!}F^{(n)}(b) &= -\sum_i \psi_i(x)\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\left[\int_a^t (s-t)^n v_i(s)\,ds\right]dt. \end{aligned}$$

Pour cela nous poserons

$$\delta_i(x) = \psi_i(x) - v_i(x).$$

En remplaçant, dans l'équation (3), $\psi_i(x)$ par $v_i(x) + \delta_i(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} R_n(x) = &\sum_i v_i(x)\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\left[\int_a^t (s-t)^n v_i(s)\,ds\right]dt \\ &- \sum_i \delta_i(x)\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\left[\int_a^t (s-t)^n v_i(s)\,ds\right]dt, \end{aligned}$$

et, en tenant compte de la formule (2), on aura

$$R_n(x) = r_n(x) - \sum_i \delta_i(x)\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\left[\int_a^t (s-t)^n v_i(s)\,ds\right]dt,$$

où l'on a posé

$$r_n(x) = f(x) - f(b) - \frac{(x-b)}{1!}f'(b) - \ldots - \frac{(x-b)^n}{n!}f^{(n)}(b).$$

Supposons maintenant que la série

$$K(x, t) = \sum_i \frac{\delta_i(x)}{n!}\int_a^t (s-t)^n v_i(s)\,ds$$

soit uniformément convergente et que $K(x, t)$ admette des dérivées partielles par rapport à x jusqu'à l'ordre $(n+1)$ inclusivement; on peut écrire

$$R_n(x) = r_n(x) - \int_a^b f^{(n+1)}(t) K(x, t) dt,$$

et, en prenant la $(n+1)^{\text{ième}}$ dérivée par rapport à x,

$$(5) \qquad F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \int_a^b \frac{\partial^{n+1} K(x, t)}{\partial x^{n+1}} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Si l'unité n'est pas une constante caractéristique du noyau $\frac{\partial^{n+1} K(x, t)}{\partial x^{n+1}}$, cette équation intégrale déterminera complètement la fonction inconnue $f^{(n+1)}(x)$ et la formule (3) donnera le développement de la fonction donnée $F(x)$ suivant les fonctions $\psi_i(x)$. Ce développement contient en outre n termes de la forme

$$\frac{(x-b)^m}{m!} f^{(m)}(e).$$

Considérons un cas particulier. Soit $F(x)$ une fonction qui admet une dérivée première dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ et

$$V_{2i}(x) = \cos ix, \qquad v_{2i+1}(x) = \sin ix.$$

Le développement (1) sera le développement de Fourier ordinaire. Posons de plus

$$\psi_{2i}(x) = 1 - \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} - \pm \frac{(ix)^{2p_i}}{(2p_i)!},$$

$$\psi_{2i+1}(x) = \frac{ix}{1!} - \frac{(ix)^3}{3!} + \pm \frac{(ix)^{2q_i+1}}{(2q_i+1)!}.$$

On aura alors

$$\delta_{2i}(x) = \frac{(ix)^{2p_i+2}}{(2p_i+2)!} \cos \theta_{2i} ix,$$

$$\delta_{2i+1}(x) = \frac{(ix)^{2p_i+3}}{(2p_i+3)!} \sin \theta_{2i+1} ix,$$

où

$$0 < \theta_k < 1.$$

On pourra donc choisir toujours p_i et q_i de façon que les séries

$$\Sigma \delta_i(x) V_i(x) \quad \text{et} \quad \Sigma \delta'_i(x) V_i(y)$$

soient uniformément convergentes, ce qui conduit au théorème suivant : « Toute fonction qui admet une dérivée est développable en série suivant les polynomes $\psi_i(x)$ définis plus haut. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions associées à un groupe « autogène » de substitutions.* Note de M. **Pierre Boutroux**, présentée par M. Émile Borel.

L'étude des équations différentielles du premier ordre m'a conduit à définir [1] des groupes de substitutions d'un type particulier, que j'appellerai désormais — pour abréger — « groupes autogènes » et qui sont caractérisés par la propriété suivante : Considérons dans le plan de la variable q une fonction multiforme $\psi(q)$ [ou plusieurs, mais je me bornerai ici au cas où il n'y en a qu'une] et envisageons l'ensemble des substitutions $[q, \psi(q)]$, correspondant à des branches quelconques de ψ, ainsi que l'ensemble des substitutions inverses et l'ensemble des produits de toutes ces substitutions : l'ensemble total forme un groupe G. Soient, d'autre part, $\psi_1(q)$, $\psi_2(q)$, ... des branches de ψ en nombre limité respectivement holomorphes dans certains champs convenablement choisis F_1, F_2, ... et telles que leurs inverses $\psi_1^{(-1)}$, $\psi_2^{(-1)}$ soient elles-mêmes holomorphes dans certains champs F_{-1}, F_{-2}, ... Appelons $\hat{\psi}_1(q)$, $\hat{\psi}_2(q)$, $\hat{\psi}^{(-1)}(q)$, ... les branches holomorphes ψ_1, ψ_2, $\psi_1^{(-1)}$, ... (*branches fondamentales*) considérées *exclusivement* à l'intérieur des champs respectifs F_1, F_2, F_{-1}, ..., et appelons (S_1), (S_2), (S_1^{-1}), ... les substitutions fondamentales $\left[q, \hat{\psi}_1(q)\right]$, $\left[q, \hat{\psi}_2(q)\right]$, ... Je dirai que *le groupe* G *est un groupe autogène si l'une quelconque de ses substitutions se trouve être un produit formé avec les substitutions fondamentales* [2].

On voit immédiatement quelle est la première conséquence de cette définition : bien que chacune des substitutions $[q, \psi_1(q)]$, $[q, \psi_2(q)]$, ... soit *multiforme*, il suffit de connaître *une* détermination de chacune d'entre elles pour pouvoir engendrer toutes les autres par multiplication : c'est là ce qui justifie le nom de *groupe autogène*. Ou encore : considérons une détermination quelconque $\overline{\psi}(q)$ à partir d'un point $\overline{q}$: si q décrit un contour fermé quelconque enveloppant un ou plusieurs points singuliers de ψ, la détermination $\overline{\psi}(q)$ se change en $\underline{\psi}(q)$ et l'on a $\underline{\psi}(q) = \overline{\psi}(q')$, la valeur q' étant déduite q en opérant une combinaison des substitutions fondamentales (S_1), etc. — La même propriété caractérise la fonction inverse de $\psi(q)$.

---

[1] *Comptes rendus*, 1919 et 1920; *Annals of Mathematics*, t. 21, 1920.

[2] Ceci exige naturellement que l'ensemble des champs F_1, F_{21}, ..., mais non point nécessairement chacun d'eux, recouvre tout le plan q (ou toute la portion de ce plan où la fonction ψ existe).

Dès que l'on connaît un groupe autogène, on peut imaginer diverses familles de fonctions correspondant à des fonctions classiques, mais s'en distinguant en ceci que certains coefficients, constants dans les fonctions classiques, sont ici remplacés par des paramètres qui subissent les substitutions du groupe autogène. Je vais définir *a priori* quelques fonctions de cette nature, me réservant de montrer ensuite que de telles fonctions existent effectivement.

Fonction à n branches associée au groupe autogène. — La fonction $f(x, q)$ de x sera ainsi qualifiée si : 1° quel que soit $\bar{x}$ fixe, il existe n branches $\widehat{f}_1(\bar{x}, q), \ldots, \widehat{f}_n(\bar{x}, q)$ qui se permutent entre elles et entre elles seulement lorsque q décrit un chemin fermé quelconque n'enveloppant aucun point singulier des branches fondamentales $\widehat{\psi}_1(q), \ldots$ et de leurs inverses; 2° l'ensemble total des déterminations de f pour $x = \bar{x}$, $q = \bar{q}$ est donné par $\widehat{f}_{i=1,\ldots,n}(\bar{x}, q')$, où q' a la valeur $\bar{q}$ ou l'une des valeurs déduites de $\bar{q}$ par les substitutions de G. — Les points critiques de $f(x, q)$ qui correspondent à des substitutions de G seront transcendants. Tout autre point critique n'échangera qu'un nombre fini de branches.

Dans le cas où $n = 1$, la fonction f sera dite *pseudo-uniforme*. — Si une fonction y de x est fonction à un nombre fini de branches associée à G et pareillement la fonction inverse f sera dite *pseudo-algébrique*.

Fonction pseudo-périodique associée au groupe autogène. — Ce sera une fonction pseudo-uniforme ayant des propriétés périodiques de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} F(x, q) = F\left[x + \widehat{\omega}_1(q), q_1\right], \\ F(x, q) = F\left[x + \widehat{\omega}_2(q), q_2\right]; \end{cases}$$

$$(2) \qquad F(x, q) = F(x, q_3),$$

où q_1, q_2, q_3 se déduisent de q par des substitutions de G. Dans la relation (2), les fonctions figurant dans les deux membres sont supposées être des *branches différentes* de F; par contre, nous pouvons définir lesdites branches de telle sorte que F désigne la même branche dans les deux membres des égalités (1). D'autre part, les « périodes » $\widehat{\omega}_1(q)$, $\widehat{\omega}_2(q)$ sont des *branches de fonctions ayant les mêmes points singuliers que les fonctions q_1 et q_2 de q et respectivement considérées dans les mêmes champs* (*exclusivement*). Parmi les égalités (1) et (2) auxquelles satisfait F, ne retenons que celles qui ne sont pas conséquences les unes des autres. Par exemple,

supposons que les *trois* substitutions $[q, q_1]$, ..., $[q, q_3]$, prises comme substitutions fondamentales (S), suffisent pour engendrer le groupe G, et que toutes les propriétés périodiques de F se ramènent aux *trois* égalités (1) et (2) écrites ci-dessus (en particulier, donc, ces égalités permettront d'engendrer toutes les branches de F connaissant l'une d'elles). Supposons, de plus, que F n'ait aucun point d'indétermination. Nous pourrons dire, alors, que F est une fonction *pseudo-elliptique*.

Considérons la fonction x de q définie par $F(x, q) = y$. Je suppose que, pour une valeur y et les valeurs voisines, ladite fonction $x(q)$ acquière n déterminations et n seulement lorsque q décrit un chemin fermé quelconque n'enveloppant aucun des points singuliers (transcendants) de $F(x, q)$ correspondant à des substitutions de G. En ce cas n aura la même valeur quel que soit y : nous dirons que n est l'*ordre* de la fonction. Dans le plan x (pour q fixe) nous pouvons définir des réseaux de quadrilatères curvilignes Q tels que F prenne la même série de valeurs sur deux côtés opposés de l'un quelconque d'entre eux; à l'intérieur d'un Q, F est holomorphe et prend n fois chacune des valeurs qu'elle ne prend pas sur le contour. — Toute fonction pseudo-elliptique est d'ordre fini.

Une fonction pseudo-elliptique qui resterait finie dans tout *un* quadrilatère Q et sur son contour se réduirait nécessairement à une constante.

Deux fonctions dont les propriétés périodiques sont définies par les mêmes égalités (1) et (2) seront dites avoir les mêmes périodes. Et l'on a le théorème fondamental : ***Deux fonctions pseudo-elliptiques ayant les mêmes périodes sont fonctions pseudo-algébriques l'une de l'autre*** (associées à G).

Les égalités (1) et (2) subsistent lorsqu'on dérive par rapport à x. Donc toute fonction rationnelle de F et ses dérivées est elle-même une fonction pseudo-elliptique ayant les mêmes périodes.

L'intégrale $\Phi(x, q)$ d'une fonction pseudo-elliptique possédant les propriétés (1) et (2) aura les propriétés

$$(1') \qquad \Phi(x, q) = \Phi\left[x + \omega_1(q), q_1\right] + \theta_1(q) = \Phi\left[x + \omega_2(q), q_2\right] + \theta_2(q);$$

$$(2') \qquad \Phi(x, q) = \Phi(x, q_3) + \theta_3(q),$$

où θ_1, ..., θ_3 ont respectivement les mêmes points singuliers que les fonctions correspondantes q_1 et $\hat{\omega}_1$, ..., q_3 et $\hat{\omega}_3$ et sont considérées dans les mêmes champs (*exclusivement*).

HYDRODYNAMIQUE. — *Équations générales du mouvement de corps solides dans un fluide parfait incompressible.* Note de M. **Riabouchinski**, présentée par M. G. Kœnigs.

On peut démontrer que les équations de W. Thomson sont applicables non seulement aux corps transpercés, mais aussi dans le cas où il y a circulation autour des corps dont la position relative peut varier. Le théorème de Thomson et le théorème de Joukowski apparaissent ainsi comme des cas particuliers de ce théorème plus général.

Considérons n corps solides qui se meuvent dans un fluide incompressible limité par une surface fermée S_0. La forme des n corps est arbitraire, ils peuvent être transpercés ou non, s'étendre jusqu'à la paroi ou être complètement entourés par le fluide.

Soit $m+1$ l'ordre de connexité du volume occupé par le fluide. Nous admettrons que le déplacement des solides est assujetti à la condition de ne pas diminuer cet ordre, ni de modifier l'étendue des surfaces qui se trouvent en contact avec le fluide.

Nous rendrons le volume occupé par le fluide simplement connexe en employant m cloisons, que nous représenterons comme des surfaces idéales de dimension déterminée, invariablement liées aux axes mobiles adjoints aux corps respectifs, lorsque le temps varie de t à $t+dt$. Ces cloisons peuvent librement pénétrer et se mouvoir dans les corps des solides et à travers la paroi limite S_0 afin que le volume occupé par le fluide reste simplement connexe malgré la modification de la position relative des solides dans l'intervalle dt.

Au contraire, en donnant au solide considéré un déplacement virtuel, compatible avec les liaisons indiquées ci-dessus, nous admettrons que les m cloisons et les autres $(n-1)$ solides conservent leur position par rapport aux axes fixes, liés à la surface limite S_0, et que ce n'est que les éléments des cloisons qui se trouvent en contact avec le corps déplacé qui sont affectés par ce déplacement; une mince bande peut s'ajouter ou être déduite de ces cloisons par l'effet de ce déplacement car les cloisons doivent continuer à prendre naissance sur la paroi du solide déplacé.

Le potentiel des vitesses en mouvement considéré est de la forme

$$(1) \qquad \varphi = \sum_{k=1}^{k=n} (u_k\varphi_{1k} + v_k\varphi_{2k} + w_k\varphi_{3k} + p_k\psi_{1k} + q_k\psi_{2k} + r_k\psi_{3k}) + \sum_{i=1}^{i=m} \varkappa_i\,\omega_i,$$

$\varphi_{1k}, \ldots, \psi_{3k}(k=1, 2, \ldots, n)$ sont des fonctions harmoniques uniformes et $\omega_i (i=1, 2, \ldots, m)$ des fonctions harmoniques non uniformes dont les constantes cycliques sont égales à l'unité. $u_k, \ldots, r_k$ sont les composantes des vitesses de translation et de rotation du $k^{\text{ième}}$ corps et $\varkappa_i$ la circulation qui correspond à la $i^{\text{ième}}$ cloison. En désignant par $\overline{u_k}, \overline{v_k}, \overline{w_k}$,

$$\overline{u_k} = u_k + q_k(z_1 - c_k) - r_k(y_1 - b_k), \quad \ldots, \quad \ldots,$$

les composantes de la vitesse d'entraînement correspondant au trièdre mobile T_k lié au corps k et par l, m, n les cosinus directeurs de l'élément de normale $d\nu_k$ dirigé vers l'intérieur du fluide, on doit avoir sur la surface de tous les corps

$$(2) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_k} = \overline{u_k}\, l + \overline{v_k}\, m + \overline{w_k}\, n \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

et sur la surface limite $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0$. En substituant (1) dans les équations (2) et en égalant les coefficients des vitesses de translation et de rotation et des circulations, on obtient que tout le long de la surface du corps $k (k=1, 2, \ldots, n)$,

$$\frac{\partial\varphi_{k1}}{\partial\nu_k} = l, \quad \ldots, \quad \ldots; \qquad \frac{\partial\psi_{k1}}{\partial\nu_k} = n(y_1 - b_k) - m(z_1 - c_k), \quad \ldots, \quad \ldots,$$

et sur la surface des autres $(n-1)$ corps et sur la surface limite S_0,

$$\frac{\partial\varphi_{k1}}{\partial\nu} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\psi_{k3}}{\partial\nu} = 0.$$

Sur les parois de tous les solides et sur la surface limite S_0

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial\nu} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\omega_m}{\partial\nu} = 0.$$

En désignant par X_k la projection sur l'axe Ox de la pression qu'exerce le solide k sur le fluide et en appliquant l'équation de pression rapportée à des axes mobiles, on a

$$(3) \qquad X_k = \int\!\!\int_{s_k} p\, l\, d\sigma = -\rho \int\!\!\int_{s_k} \frac{\partial\varphi}{\partial t}\, l\, d\sigma - \frac{1}{2}\rho \int\!\!\int_{s_k} (W_k'^2 - \overline{W}_k^2)\, d\sigma.$$

Les intégrales s'étendent à tous les éléments de la paroi du solide k, W'_k et $\overline{W_k}$ expriment la vitesse relative et d'entraînement.

En appliquant la transformation de Green, la formule générale de la variation des intégrales triples, un théorème de cinématique que nous avons

démontré précédemment et en tenant compte des conventions faites plus haut, on peut représenter l'équation (3) comme suit :

$$(4)\qquad X_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial u_k} - \frac{\partial R}{\partial a_k}$$

où la fonction modifiée de Lagrange est de la forme

$$R = T - K + \rho \sum_{i=1}^{i=m} \chi_i \gamma_i.$$

T exprime l'énergie cinétique du mouvement acyclique du fluide, K l'énergie cinétique du mouvement cyclique et χ_i le flux relatif à travers la cloison i dans le mouvement acyclique. On obtient de même des équations analogues pour les composantes Y_k et Z_k de la force et les composantes L_k, M_k, N_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) du couple. Les composantes des forces et des couples résultants agissant sur les solides par l'effet des pressions hydrodynamiques sont $(-X_1)$, $(-Y_1)$, ... $(-N_k)$. Si l'on connaît les autres forces et couples qui sollicitent les n solides et l'énergie cinétique des solides, on pourra écrire les équations générales du mouvement en appliquant les équations de Lagrange.

Les équations (4) ont la même forme que les équations de Routh et on les ramène aussitôt à la forme de W. Thomson, mais le domaine de l'application de nos formules est plus étendu. On peut les appliquer, par exemple, comme nous l'avons indiqué dans une Note précédente[1] au problème du mouvement cyclique plan d'un liquide autour d'un solide qui se meut parallèlement à une rectiligne.

ASTRONOMIE. — *Sur la rectification des éphémérides des petites planètes.* Note de M. **Michkovitch**, présentée par M. Andoyer.

Le problème de la rectification des éphémérides approchées des petites planètes peut trouver une solution à la fois très simple et très rapide dans le

(1) *Comptes rendus*, t. **173**, 1921, p. 25. La rectification suivante doit être faite dans la Note que nous venons de rappeler. L'indice $2n+1$ qui figure dans les expressions de T et de Y doit être $n+1$. La valeur limite du rapport $(2T : \rho\pi b^2 N^2)$ est alors $\frac{\pi^2-3}{3}$ au lieu de $\frac{\pi^2-4}{4}$ et les valeurs du rapport $(Y : \rho 2 b V^2)$ qui figurent dans le Tableau deviennent $-\infty$; $-14{,}22$, $-0{,}75$ $-0{,}09$, $-0{,}03$, 0.

cas où l'on se propose de rectifier l'éphéméride, à l'aide d'une seule observation, en corrigeant seulement M, l'anomalie moyenne.

Supposons, en effet, que les deux éléments ☊ et i qui fixent la situation du plan de l'orbite soient connus exactement, ce qui revient à admettre que la planète reste constamment dans le plan de son orbite. Dans ce cas-là, les quantités A, B, a, b, connues sous le nom des *constantes de Gauss*, peuvent être considérées comme des constantes.

Cela posé, reportons-nous aux équations bien connues qui expriment les variations des coordonnées équatoriales géocentriques en fonction des variations des éléments, en particulier à l'équation

$$\cos\delta\, d\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\Delta}dx + \frac{\cos\alpha}{\Delta}dy.$$

D'après l'hypothèse que nous venons de faire, on aura

$$dx = \frac{x}{r}dr + x\cot(v+\mathrm{A})\,dv, \qquad dy = \frac{y}{r}dr + y\cot(v+\mathrm{B})\,dv.$$

Or, si l'on néglige la quantité dr, ce que l'on peut faire dans le cas des éphémérides approchées, l'équation précédente devient

$$\cos\delta\, d\alpha = \left[-\frac{\sin\alpha}{\Delta}x\cot(v+\mathrm{A}) + \frac{\cos\alpha}{\Delta}y\cot(v+\mathrm{B})\right]dv,$$

d'où

$$dv = \frac{\Delta\cos\delta\, d\alpha}{rb\cos\alpha\cos(v+\mathrm{B}) - ra\sin\alpha\cos(v+\mathrm{A})}.$$

Ayant dv, on se servira de l'équation

$$d\mathrm{M} = \frac{r^2\, dv}{a^2\cos\varphi}$$

pour obtenir la correction de M qu'il faudra appliquer aux anomalies moyennes primitives, afin d'avoir celles qui doivent servir au calcul de l'éphéméride rectifiée.

Les trois exemples ci-dessous permettent de voir le mieux ce que la méthode peut donner :

Planète.	Date.	Observation. α.	Observation. δ.	Calcul. α.	Calcul. δ.	Calcul corr. α.	Calcul corr. δ.
		h m	° ′	h m	° ′	h m	° ′
284. Amalia...	1918 mai 6	15. 0,4	—19.10	14.56,0	—19. 2	15. 0,4	—19.12
403. Cyane....	1918 avril 15	11.44,4	—11. 8	11.52,8	—11.58	11.44,5	11.10
137. Melibœa..	1919 août 26	20.17,1	+ 0.47	19.48,4	— 0.44	20.17,1	+ 0,46

Les observations ont été faites à l'Observatoire d'Alger et publiées dans le *Journal des Observateurs* (t. 2, p. 141, et t. 3, p. 115). Les positions calculées ont été obtenues à l'aide des éléments de la *Connaissance des Temps* pour 1915.

ASTRONOMIE. — *Sur la spectrophotométrie des étoiles carbonées.* Note de M. **Salet**, présentée par M. Baillaud.

Ces étoiles, dont le spectre est caractérisé par les bandes des hydrocarbures (type IV de Secchi, N de Harvard), n'ont pas été étudiées, à notre connaissance, du point de vue spectrophotométrique, et cela à cause de leur faible intensité, surtout dans la partie bleue du spectre. Au cours d'une étude générale des divers types stellaires, nous avons déterminé, autrefois, par la méthode des écrans colorés de M. Nordmann, les intensités globales des parties rouge, verte et bleue de leur spectre. Nous sommes amenés à parler aujourd'hui de ces mesures parce que les observations publiées récemment par M. Nordmann ne contiennent pas d'étoiles de ce type. Nous donnons, en grandeur stellaire, la différence d'intensité que nous avons trouvée entre la partie verte ou bleue du spectre de huit de ces étoiles et la partie correspondante du spectre d'une étoile du type solaire ayant même intensité dans le rouge. En ajoutant des constantes convenables, on pourra rendre ces chiffres comparables à ceux qui seraient obtenus en prenant d'autres unités.

	Æ.1900.	Ⓓ.	Vert.	Bleu.
	h m	° ′	g	g
1648 Harvard	5. 0	+ 1. 2	0,9	2,2
2405 »	6.30	38.32	1,1	2,0
3541 »	8.50	17.37	1,1	2,1
4133 »	10.33	−12.52	1,0	1,4
4195 »	10.38	+67.56	1,0	1,6
4846 »	12.40	45.59	0,9	2,7
8297 »	21.38	35. 3	0,9	2,0
19 Poissons	23.41	2.56	1,1	1,9

Le fort obscurcissement de la partie bleue du spectre, auquel ces étoiles doivent leur couleur rouge, peut être dû en partie à leur température qui serait plus basse que celle des autres types, ou encore à une absorbtion générale, mais cette faible intensité du bleu comparé au rouge peut provenir surtout des raies et des bandes d'absorbtion qui chargent de plus en plus la partie la plus réfrangible du spectre quand on passe, dans l'échelle des types stellaires, des étoiles blanches aux étoiles rouges.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur le rôle des symétries analytiques dans les théories relativistes.* Note de M. **A. Buhl.**

Les si intéressantes Notes de MM. Picard et Painlevé (24 octobre) et la proche publication d'un second Mémoire [1] sur les théories en litige m'incitent à demander la permission de noter ici quelques points tenant aux fondements mêmes du sujet.

Il m'est essentiel de rappeler qu'en transformant l'identité

$$\iint_S X\, dY\, dZ = \iiint_V dX\, dY\, dZ, \tag{1}$$

j'ai obtenu une formule du type stokien dont l'un des membres est

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial F_3} & \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\, dx_2\, dx_3}{\frac{\partial F}{\partial x_4}}. \tag{2}$$

J'ai montré que le déterminant contenu dans cette intégrale conduirait immédiatement à la forme des équations du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz généralisé par M. De Donder. Il y a bien d'autres choses à en tirer.

Dans (2) adjoignons aux M_{ij} un indice k, le même pour la même expression (2).

Dans l'expression d'indice k, on peut indifféremment

$$\pm 2 M_{ijk} \qquad \text{ou} \qquad \pm 2 M_{ijk} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}.$$

Imposons à ce trinome d'être symétrique (au signe près) par rapport à tous les indices i, j, k. Il faut évidemment que le premier terme prenne une forme analogue à celle des deux autres et l'on retrouve ainsi les *crochets de Christoffel.*

Dans les théories classiques, ces crochets naissent ordinairement des

---

[1] Le premier Mémoire *Sur les formules fondamentales de l'électromagnétisme et de la gravifique* a été publié aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1920.

formes quadratiques, ordre qu'il est possible d'inverser. On peut passer des crochets de Christoffel aux formes différentielles quadratiques ; en d'autres termes, *on peut passer d'une identité fondamentale* (1) *du Calcul intégral au champ électromagnétique symbolisé en* (2) *et, de là, à l'espace métrique généralement non euclidien.*

Il faut immédiatement reconnaître que ceci ne va pas sans restrictions analogues à celles de MM. Picard et Painlevé. Ainsi le raisonnement précédent repose sur des considérations arbitraires de symétrie analytique. De plus remonter des crochets de Christoffel aux formes quadratiques contient plus d'arbitraire que le fait inverse ; on peut notamment en profiter pour retrouver, dans la géométrie non-euclidienne obtenue, le déplacement parallèle de Levi-Civita. Enfin « pour une catégorie étudiée de phénomènes, il est nécessaire de faire des hypothèses complémentaires pour parvenir à la forme quadratique correspondante », ce qui est le langage même de M. Picard [1].

Mais, malgré ces restrictions et n'y eût-il en jeu aucune philosophie relativiste, ne serait-ce pas une chose bien digne d'être notée qne de pouvoir passer de l'identité (1) au champ électromagnétique et aux métriques non euclidiennes ?

L'expression (2) donne davantage encore.

Remplaçons-y les deux dernières lignes du déterminant par

$$\begin{matrix} \Gamma^{\alpha}_{r1} & \Gamma^{\alpha}_{r2} & \Gamma^{\alpha}_{r3} & \Gamma^{\alpha}_{r4} \\ \Gamma^{r}_{\beta 1} & \Gamma^{r}_{\beta 2} & \Gamma^{r}_{\beta 3} & \Gamma^{r}_{\beta 4} \end{matrix},$$

les indices α, β, r étant invariables pour un même déterminant. Les expressions analogues, où les dernières lignes des déterminants seraient

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ \Gamma^{\alpha}_{\beta 1} & \Gamma^{\alpha}_{\beta 2} & \Gamma^{\alpha}_{\beta 3} & \Gamma^{\alpha}_{\beta 4} \end{matrix},$$

sont identiquement nulles. Par addition on constitue des

$$F^{\alpha}_{\beta ik} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta k}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta i}}{\partial x_k} + \Gamma^{\alpha}_{ri}\Gamma^{r}_{\beta k} - \Gamma^{\alpha}_{rk}\Gamma^{r}_{\beta i}$$

qui sont les composantes du tenseur de courbure [2].

---

(1) *Loc. cit.*, p. 681.

(2) H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, 4e édition, p. 107.

Je n'essaie point ici de justifier davantage ce résultat qui sera développé dans le second Mémoire annoncé. En possession de ce tenseur (et du tenseur contracté), la théorie se poursuit avec le principe d'Hamilton et les méthodes ordinaires du Calcul des variations comme le montre si magistralement M. Th. De Donder dans sa *Gravifique einsteinienne*.

PHYSIQUE. — *Sur la théorie de relativité et l'expérience de M. Sagnac.* Note de M. **P. Langevin**.

D'intéressantes remarques sur la théorie de relativité ont été présentées récemment par MM. Painlevé et Picard. Je montrerai ultérieurement comment les difficultés soulevées par M. Painlevé ne sont qu'apparentes et comment on peut mettre à profit ses critiques.

Je désire ici me placer au point de vue purement expérimental et rappeler que cette théorie est la *seule* qui permette actuellement de représenter l'ensemble des faits expérimentaux connus et qui possède en outre la remarquable puissance de prévision confirmée de manière si éclatante par la déviation des rayons lumineux et le déplacement des raies spectrales dans le champ de gravitation du Soleil.

Pour montrer combien cette synthèse est complète et répondre en même temps au désir exprimé par M. Picard, je vais montrer comment la théorie de relativité généralisée explique, de manière quantitative, le résultat de l'expérience de M. Sagnac et en donne en même temps l'interprétation la plus simple et la plus conforme à la nature des choses.

On sait que M. Sagnac fait interférer deux rayons lumineux issus d'une même source après leur avoir fait parcourir, grâce à des miroirs convenablement placés, un même circuit fermé dans des sens opposés. Il constate que la mise en rotation avec une vitesse angulaire ω de la plate-forme qui porte l'ensemble du système optique produit un déplacement des franges qui correspond à une différence $\frac{4\omega A}{c^2}$ entre les durées de parcours du même circuit dans les deux sens, A représentant l'aire intérieure au circuit projeté sur un plan normal à l'axe de rotation et c la vitesse de la lumière.

Remarquons tout d'abord qu'il s'agit d'une expérience du premier ordre $\left(\text{en } \frac{\omega R}{c}, \text{ R étant le rayon de la plate-forme}\right)$, sur laquelle toutes les théories de l'optique, mécaniques, électromagnétiques ou relativistes sont d'accord, qualitativement et quantitativement, et qui ne peut témoigner pour ni

contre aucune d'entre elles. On ne saurait donc, à aucun point de vue, comparer cette expérience à celle de M. Michelson. Celle-ci est du second ordre en fonction de la vitesse de translation, et son importance tient à ce qu'elle est venue mettre en évidence de manière aiguë la nécessité d'introduire une cinématique nouvelle, imposée d'ailleurs par l'accord remarquable entre les équations de la théorie de Lorentz et l'ensemble des phénomènes électromagnétiques et optiques.

Bien que toutes les théories prévoient le résultat de M. Sagnac, on l'obtient de la manière la plus simple et la plus naturelle en se plaçant au point de vue de la relativité généralisée et en y voyant l'influence sur la propagation de la lumière du champ de gravitation particulier aux observateurs liés à la plate-forme en rotation, le même champ qui se manifeste mécaniquement par les effets de force centrifuge ou gyroscopiques.

Cette expérience, loin de constituer une difficulté pour la théorie de relativité, lui fournit ainsi un des exemples d'applications les plus immédiats.

Les caractères de symétrie du phénomène de rotation, et en particulier le fait que la rotation change de sens avec l'orientation de l'observateur suivant l'axe, exigent que la marche d'horloges portées par la plate-forme ainsi que les dimensions de celle-ci ou de règles qui lui sont liées ne soient modifiées qu'au second ordre en $\frac{\omega R}{c}$ par rapport à la marche d'horloges ou aux dimensions de règles de même construction liées à des observateurs sans rotation, ces modifications ne devant pas changer avec le signe de ω. On sait par exemple que les déformations élastiques de la plate-forme et des appareils, déformations dont il faudrait tenir compte si la précision pouvait être poussée au second ordre, ne dépendent pas du sens de rotation.

Il en résulte que si l'on représente par (x, y, z, t) et (x', y', z', t') les coordonnées espace-temps d'un même événement par rapport à des axes rectangulaires liés à la plate-forme et à des axes sans rotation respectivement, les relations habituelles de la cinématique ancienne subsistent au premier ordre entre ces deux systèmes de coordonnées. Les axes des z et des z' étant tous deux parallèles à l'axe de rotation, et les événements origines en coïncidence, on a

$$x' = x\cos\omega t - y\sin\omega t, \qquad y' = x\sin\omega t + y\cos\omega t, \qquad z' = z, \qquad t' = t.$$

L'invariant fondamental, qui, pour les observateurs sans rotation a la forme euclidienne habituelle

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - dl'^2, \qquad dl'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2,$$

prend dans le système de référence lié à la plate-forme la valeur obtenue par substitution, et dans laquelle je néglige les termes en ω d'ordre supérieur au premier :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - 2\omega(x\,dy - y\,dx)\,dt - dl^2, \qquad dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

La propagation d'un rayon lumineux, caractérisée par la condition $ds^2 = 0$, correspond à la relation

$$c^2 dt^2 - 4\omega\,dA\,dt - dl^2 = 0,$$

où $dA = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$ représente la surface du triangle ayant pour sommet l'origine des coordonnées et pour base la projection sur le plan des x, y de l'élément du rayon lumineux vu par les observateurs liés à la plate-forme.

Cette relation peut s'écrire, au même ordre d'approximation :

$$dt = \frac{dl}{c} + \frac{2\omega}{c^2}\,dA;$$

d'où, par intégration le long d'un contour fermé :

$$t_1 = \frac{l}{c} + \frac{2\omega A}{c^2},$$

A représentant l'aire du contour projeté sur un plan normal à l'axe de rotation.

Pour le rayon qui suit le même contour en sens inverse, l'aire change de signe et l'on a

$$t_2 = \frac{l}{c} - \frac{2\omega A}{c^2},$$

d'où la différence $\frac{4\omega A}{c^2}$ conforme au résultat expérimental de M. Sagnac.

Au sens général introduit par M. Einstein où le champ de gravitation est représenté par l'ensemble des dix potentiels g_{ik}, l'expérience de M. Sagnac mesure l'influence sur la propagation de la lumière des potentiels g_{14} et g_{24} respectivement égaux à $2\omega y$ et à $-2\omega x$, et qui seuls sont modifiés *au premier ordre* par la rotation.

Il en est de même pour les effets de force centrifuge composée ou gyroscopiques par opposition avec les effets de force centrifuge statique qui sont du second ordre et qui correspondent au potentiel g_{44} dont la valeur exacte au second ordre est $c^2 - \omega^2(x^2 + y^2)$.

Cette expérience optique du premier ordre s'apparente ainsi à l'expérience du pendule de Foucault ou à celle du gyroscope et manifeste une fois de plus depuis Newton la possibilité de mettre en évidence le mouvement de rotation d'un système matériel par des expériences intérieures au système.

ÉLECTRICITÉ. — *Sur la théorie de la pile.* Note de M. **Décombe**, transmise par M. E. Bouty.

1. Les équations sur lesquelles Gibbs [1] a fondé la théorie correcte de la pile impliquent l'hypothèse suivante que certains auteurs [2] ont pris pour base de la théorie :

« Le travail fourni par une pile hydro-électrique en activité est égal à la chaleur non compensée que dégagerait la réaction chimique si elle s'accomplissait en circuit ouvert. »

Cette hypothèse (qui ne se trouve nulle part explicitée dans le Mémoire de Gibbs, d'où la notion même de chaleur non compensée est totalement absente) permet, en effet, de rendre très exactement compte des différences que l'expérience révèle entre la chaleur chimique et la chaleur voltaïque de la pile.

Je me propose de montrer ici qu'on peut établir la théorie de la pile sur une proposition beaucoup plus simple, presque intuitive, qui résulte immédiatement des principes sur lesquels nous avons édifié la théorie électronique de la chaleur non compensée [3]. Cette proposition est la suivante :

« La chaleur non compensée dégagée dans une pile en activité par la réaction chimique qui s'y accomplit est égale à la chaleur de Joule (ri^2dt) qui s'y développe en vertu de sa résistance intérieure r et du courant i qui y circule. »

En d'autres termes, et conformément aux vues que nous avons développées touchant l'origine électrique de la chaleur non compensée, la chaleur de Joule intérieure (ri^2dt) n'est autre chose que l'expression en termes électriques de la chaleur non compensée dégagée dans la pile par la réaction chimique qui s'y accomplit.

(1) Gibbs, *Transactions of the Connecticut Academy*, t. 3, 1878.

(2) Duhem, *Introduction à la Mécanique chimique*, p. 130.

(3) *Comptes rendus*, 6 février et 15 mai 1911, et *Journal de Physique*, 1911.

Soient, en effet, W l'énergie cinétique de la pile, U son énergie intérieure, S son entropie, v son volume, θ sa température, p la pression extérieure et L le coefficient de self-induction du circuit.

La chaleur non compensée élémentaire *dégagée* par la réaction chimique s'accomplissant dans la pile s'exprime, dans notre hypothèse, par $-ri^2\,dt$; celle dégagée dans le circuit extérieur a pour valeur $-\mathrm{R}i^2\,dt$. La totalité de la chaleur non compensée a donc pour expression $-(\mathrm{R}+r)i^2\,dt$ et le principe de l'équivalence s'écrit

$$(1)\qquad d\mathrm{W} + d\mathrm{U} = \mathrm{J}\Theta\,d\mathrm{S} - (\mathrm{R}+r)i^2\,dt - \mathrm{L}i\,di - p\,dv,$$

$\mathrm{L}i\,di$ désignant le travail électromagnétique et $p\,dv$ le travail accompli contre la pression extérieure.

Considérons maintenant *la même* réaction chimique (caractérisée par *les mêmes* valeurs de $d\mathrm{U}$, $d\mathrm{S}$ et dv, et, par conséquent, par la même masse de métal dissous), mais s'accomplissant en circuit ouvert. Soient $\delta\mathrm{Q}_n$ la chaleur non compensée dégagée dans cette réaction et $d_1\mathrm{W}$ la variation de force vive. Nous avons à écrire

$$(2)\qquad d_1\mathrm{W} + d\mathrm{U} = \mathrm{J}\Theta\,d\mathrm{S} - \delta\mathrm{Q}_n - p\,dv,$$

d'où, par soustraction,

$$(3)\qquad \delta\mathrm{Q}_n + d_1\mathrm{W} - d\mathrm{W} = (\mathrm{R}+r)i^2\,dt + \mathrm{L}i\,di;$$

or

$$(\mathrm{R}+r)i + \mathrm{L}\frac{di}{dt} = \mathrm{E},$$

E désignant la force électromotrice de la pile. On a donc

$$(4)\qquad \delta\mathrm{Q}_n + d_1\mathrm{W} = \mathrm{E}i\,dt + d\mathrm{W},$$

tandis que la pseudo-hypothèse de Gibbs se traduirait simplement par

$$\delta\mathrm{Q}_n = \mathrm{E}i\,dt.$$

Mais les variations de force vive $d\mathrm{W}$ et $d_1\mathrm{W}$ (dont Gibbs ne tient pas compte dans son Mémoire) pouvant être considérées comme négligeables, les relations (4) et (5) sont pratiquement équivalentes. Elles le sont *rigoureusement* si la réaction considérée (caractérisée par les valeurs de $d\mathrm{U}$, $d\mathrm{S}$ et dv) s'effectue dans les deux cas (c'est-à-dire en circuit ouvert et en circuit fermé) *dans le même temps*, car alors les vitesses et, par suite, les forces vives

sont constamment égales et l'on a

$$d_1 W = dW.$$

2. On peut obtenir beaucoup plus simplement les résultats précédents. On peut imaginer, en effet, qu'il se développe en chacun des points P_1, P_2, ... de la surface de contact des substances réagissant en circuit ouvert une force électromotrice E donnant lieu à de petits courants i_1, i_2, i_3, ... que la fermeture de circuit a pour effet d'orienter parallèlement à une direction commune en donnant lieu au courant total de la pile $I = i_1 + i_2 + \ldots$. Or, on tire de là :

$$E i_1\, dt + E i_2\, dt + \ldots = EI\, dt,$$

relation dont le premier membre représente la chaleur de Joule développée par les courants locaux i_1, i_2, ... (et, par conséquent, en vertu de notre hypothèse, la chaleur non compensée dégagée par la réaction chimique s'accomplissant en circuit ouvert), tandis que le second représente le travail électrique accompli pendant le même temps par la pile en activité. Nous retrouvons ainsi la relation (5), laquelle est *numériquement* vérifiée par l'expérience.

En résumé, l'hypothèse fondamentale que nous avons proposée touchant l'origine électrique de la chaleur non compensée et dont nous avons déjà éprouvé la valeur dans le cas des diélectriques et celui des substances conductrices non décomposées par le courant, s'étend encore au cas des électrolytes, où il trouve une intéressante vérification numérique.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Sur un nouveau procédé de dosage du fluor à froid.* Note de M. **Travers**, présentée par M. Haller.

Les deux méthodes de dosage du fluor les plus anciennement appliquées sont : la méthode de Berzélius : précipitation à l'état de CaF^2, et la méthode de Wöhler, reprise par Frésenius [1] : volatilisation du fluor à l'état de SiF^4 et détermination du fluor, soit par pesée de SiF^4 (Frésenius), soit par transformation de SiF^4 en SiF^6K^2 (Tammann, Carnot, Penfield).

La méthode de Berzélius a été étudiée, avec grand soin par Seemann [2].

(1) *Zeit. für anal. Chem.* t. 5, 1866, p. 190.

(2) *Zeit. für anal. Chem.* t. 44, 1905, p. 343.

Il a montré, comme l'a ensuite confirmé Koch (1), qu'elle fournissait des résultats très mauvais, l'erreur pouvant atteindre 15 pour 100. Les raisons possibles de cet écart peuvent être :

1° Une précipitation incomplète de CaF^2, en raison de sa solubilité dans l'eau pure, ou l'acide acétique étendu. L'auteur n'a pu expliquer ainsi qu'une perte de 2 à 3 pour 100.

2° Une volatilisation du fluor; l'auteur n'a pas pu en déceler.

3° L'entraînement du fluor par la silice précipitée au cours du dosage : Seemann n'a pu en mettre en évidence; d'ailleurs l'exactitude des résultats trouvés pour SiO^2, *en l'absence d'alumine* (2), est une preuve indirecte de l'absence de fluor dans la silice.

Seemann conclut en disant que cette méthode ne peut être conservée qu'en analyse qualitative.

La seconde méthode est d'une application délicate; en particulier, si l'on utilise, comme Treadwell et Koch (3), le titrage de l'acide mis en liberté par action de SiF^4 sur la solution aqueuse de KCl, il faut être sur qu'il ne se dégage ni SO^3, ni SO^2, ou que ces gaz sont retenus parfaitement.

Récemment, Wagner et Ross (4) ont donné un moyen d'éviter cette erreur; une autre difficulté est la nécessité d'éviter toute trace d'humidité dans l'appareil. Si ces précautions ne sont pas observées, il se produit des compensations qui peuvent faire croire à des résultats corrects, alors que l'analyse est fausse.

La méthode que nous allons décrire est simple, relativement rapide, et nous a donné déjà d'excellents résultats pour le dosage du fluor dans les fluorures solubles, dans CaF^2, dans BF^4K, où la présence du bore ajoute une difficulté dans les autres méthodes. Nous n'avons pas encore pu l'appliquer aux composés fluorés renfermant de *l'alumine*, tels que la plupart des complexes naturels du fluor, cryolithe, topaze, etc. Des recherches se poursuivent.

Principe de la méthode. — Le fluor est précipité *à froid à l'état de* SiF^6K^2, que nous dosons volumétriquement, comme il a été indiqué dans une précédente Note (5).

---

(1) *Amer. Chem. Soc.* 1907, p. 1126.
(2) Travers, *Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 714.
(3) Treadwell, *Analyse quantitative*, p. 437 (Dunod et Pinat, éditeurs).
(4) *Chemiker Zeit.*, octobre 1921, p. 974.
(5) *Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 714.

La méthode est en somme la contre-partie de celle que nous avons décrite pour le dosage de la silice.

Le fluor est amené à l'état de fluorure alcalin soluble. Dans la solution, généralement alcaline, du fluorure, on ajoute une proportion connue de SiO^2, à l'état de silicate de *potasse* [il suffit d'employer deux fois environ la proportion théorique de SiO^2 (¹), correspondant à la transformation de F en SiF^6K^2]; on neutralise ensuite en présence d'hélianthine, par l'acide chlorhydrique, dont on verse un faible excès (2^{cm^3} environ); on ajoute du chlorure de potassium solide, de façon à avoir une concentration de 20 pour 100 environ; on filtre sur filtre dur (²), on lave avec une solution de KCl à 20 pour 100, jusqu'à disparition de l'acidité (indicateur : hélianthine). Et l'on titre volumétriquement SiF^6K^2 à l'ébullition avec une liqueur de $KOH\frac{N}{5}$; 1^{cm^3} correspond à $5^{mg},7$ de fluor.

La méthode a été étudiée à partir de KF.HF *pur*.

	Pesée.	F théor.	F trouvé.
	g	g	g
KF.HF	0,413	0,201	0,200
	0,341	0,165	0,1635
	0,543	0,2644	0,2633

La manipulation peut être faite entièrement dans des appareils en verre, si l'on part de faibles concentrations en fluorures neutres, ce qui est le cas des analyses.

Pour la fluorine, le fluor est transformé en fluorure de sodium par la méthode de Berzélius avec quelques légères modifications qui seront décrites dans un Mémoire ultérieur.

Cette méthode simple présente, d'autre part, l'intérêt de fournir un réactif *à froid* du fluor dissimulé, réactif qui peut rendre dans l'étude des complexes du fluor les mêmes services que le nitrate d'argent dans les chlorures complexes du chrome ou du cobalt.

On peut, par exemple, à l'aide de ce procédé, suivre la décomposition progressive du complexe cryolithique, par action de la chaleur, en présence du mélange silicate de potasse et acide chlorhydrique.

Il nous a permis de mettre en évidence du fluor dissimulé dans un fluorure d'aluminium hydraté que nous décrirons ultérieurement.

Enfin la méthode permet un dosage simple et relativement rapide du fluor dans les fluoborates alcalins.

(¹) Une plus forte teneur rend la filtration ultérieure et le lavage plus lents.

(²) Il est bon de s'assurer que le filtre est suffisamment dur et ne laisse pas passer de fluosilicate.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur les dibromoanthraquinones homonucléaires.* Note (¹) de M. **Grandmougin**.

Pour élucider la constitution de la dibromoanthraquinone historique ayant servi à MM. Græbe et Liebermann à la synthèse de l'alizarine, j'ai été amené à préparer avec mes collaborateurs, MM. Sack et Seidl, les quatre dibromoanthraquinones homonucléaires : 1.2 ; 2.3 ; 1.3 et 1.4.

Cette préparation s'effectue par des réactions classiques, en prenant comme point de départ des composés à constitution connue.

Pour la 1.2-dibromoanthraquinone on part de l'α-amidoanthraquinone qui, bromée en milieu acétique, donne la 1-amido-2-bromoanthraquinone. On y remplace ensuite le groupe amidogène par le brome (en passant par le diazo et le perbromure).

La 2.3-dibromoanthraquinone résulte de la même façon à partir de la 2-amido-3-bromoanthraquinone. Celle-ci a été obtenue en débromant la 1.3-dibromo-2-amidoanthraquinone qui se forme en dibromant la 2-amidoanthraquinone (²). (Brevet allemand n° 158 474.)

La 1.3-dibromoanthraquinone peut se faire soit par désamidation de la 1.3-dibromo-2-amidoanthraquinone, déjà mentionnée, ou à partir de la 1-amido-2.4-dibromoanthraquinone qui se prépare d'une façon quantitative en dibromant l'α-amidoanthraquinone (signalée en premier lieu dans le brevet allemand n° 115 048).

Cette dibromoanthraquinone a du reste été décrite depuis par MM. Ullmann et Eiser (³). Les propriétés que ces auteurs lui attribuent concordent du reste avec celles que nous avons nous-même observées.

Enfin la 1.4-dibromoanthraquinone a été obtenue à partir de la 1-bromo-4-nitroanthraquinone par réduction, puis en remplaçant le groupe amidogène par le brome. Cependant, comme lors de la réduction une partie du brome est enlevée, on n'obtient pas par ce procédé un produit absolument pur (point de fusion 176° au lieu de 196°).

Il vaut mieux, ainsi que viennent de le faire tout récemment MM. Battegay et Claudin (⁴), prendre comme point de départ la 1.4-diamidoanthraquinone.

(¹) Séance du 17 octobre 1921.

(²) Ullmann et Junghans, *Ann. Chem.*, t. 399, p. 336.

(³) *Ber.*, t. 49, 1916, p. 2154.

(⁴) *Bull. Soc. Ind. Mulh.*, décembre 1920.

Voici les caractéristiques des quatre dibromoanthraquinones homonucléaires :

	Point de fusion.
1.2-dibromoanthraquinone	221°
2.3- »	283
1.3- »	210
1.4- »	196

Nous compléterons ces données en signalant que l'on connaît également les dérivés hétéronucléaires suivants :

	Point de fusion.
1.5-dibromoanthraquinone	292°
2.6- »	279°-280°
2.7- »	248°
1.8- »	230°

qui sont décrites dans différents brevets et publications.

Il n'est peut-être pas sans intérêt de mentionner que la dernière édition du *Memento du chimiste* (4e édition, 1921) ne signale que deux dibromoanthraquinones avec les préfixes α et β sans indication de position. On peut affirmer, d'une façon à peu près certaine, que le dérivé α n'est autre que le dérivé 2.7, et que le dérivé β n'est autre que la 2.3-dibromoanthraquinone historique.

MÉTÉOROLOGIE. — *Sur l'emploi de la radiogoniométrie dans l'étude des orages et des parasites atmosphériques*. Note (1) de M. E. **Rothé**, présentée par M. E. Bouty.

A partir de 1911, je m'étais proposé d'étudier l'effet des variations atmosphériques sur la propagation des ondes hertziennes en utilisant des signaux émis spécialement à cet effet par la station radiotélégraphique de la Tour Eiffel (2).

Ces observations furent fréquemment troublées par les « parasites » et dès cette époque j'avais eu l'impression très nette que ce n'étaient pas seulement les orages locaux, mais des phénomènes souvent très lointains qui amenaient ces perturbations, et c'est pourquoi j'avais demandé à la station émettrice de bien vouloir noter, comme le faisait aussi la station réceptrice,

(1) Séance du 2 novembre 1921.

(2) *Comptes rendus*, t. 154, 1912, p. 193, 1454; t. 158, 1914, p. 699.

les conditions météorologiques. Je n'utilisais à cette époque, comme tous les physiciens qui s'occupaient de ces questions, que des antennes pour la réception.

Au cours de la guerre, l'emploi des amplificateurs rendit la réception plus sensible et les cadres mobiles permirent d'effectuer d'une façon simple les recherches de radiogoniométrie. Dès lors, l'étude des orages pouvait devenir plus précise puisque non seulement on pouvait accuser la présence d'une manifestation orageuse, mais encore en déterminer la direction et la marche.

Des observations commencées à Saint-Cyr en 1917, à la demande des services militaires, furent continuées à Strasbourg après l'armistice, et poursuivies depuis, chaque année, en été, à l'époque des périodes orageuses. L'observation et la distinction des parasites nécessitent une technique délicate acquise par l'expérience.

I. *Mode opératoire.* — On emploie le montage classique des cadres radiogoniométriques, mais la technique opératoire est particulière, car on doit déterminer non pas seulement des maximums d'intensité, mais des maximums de fréquence; aussi est-on amené à compter les décharges des parasites par minute suivant les divers azimuts.

II. *Longueurs d'onde.* — Les longueurs d'onde propres du cadre importent peu. Il ressort des expériences faites qu'il est préférable d'employer *une grande longueur d'onde, donc un grand nombre de spires* puisque les décharges lointaines à grande énergie sont aussi à grande longueur d'onde, mais il ne faut pas oublier qne les décharges atmosphériques sont *très amorties* et qu'il n'y a pas à proprement parler de phénomène de résonance, mais plutôt *fonctionnement par choc*, le cadre vibrant avec sa période propre.

III. *Parasites divers.* — Les parasites entendus dans le téléphone donnent des bruits très différents.

En dehors de ces bruits spéciaux, nous distinguerons :

1° Craquements et claquements. Ce sont les parasites les plus fréquents, observés surtout dans la journée, que les Anglais nomment *clicks.* Nous appellerons craquements ceux dont la note est la plus basse, ressemblant au bruit d'un morceau de bois que l'on brise, réservant le nom de claquements aux bruits de note plus élevés que les précédents et surtout plus brefs et plus secs. Ils ont une fréquence très variable et parfois sont assez nombreux, quoique distincts entre eux, pour former une sorte de crépitement continu tout à fait différent cependant des craquements.

2° Nous réserverons le nom de décharges à des manifestations qui s'entendent plus rarement, sont d'assez longue durée (parfois jusqu'à 5 secondes), présentent un bruit métallique intense, de note élevée, très nette et conservant, pendant leur durée entière, la même intensité et la même hauteur.

IV. *Méthode d'inscription.* — Cette distinction très subjective des parasites à l'oreille nécessite une grande habitude et il est avantageux de substituer au téléphone un appareil inscripteur, tel que le galvanomètre oscillographe à fer mobile de M. Abraham. On peut ainsi inscrire les parasites pendant quelques minutes sur chaque azimut et dépouiller ensuite les bandes d'inscription. Les défauts dus à l'oreille et les interprétations personnelles disparaissent ainsi.

V. *Origine des décharges. Etude d'un orage.* — Des nombreuses observations faites, on a pu conclure que les décharges ne semblent dues qu'à des nuages orageux plus ou moins proches. L'inscription qui dure souvent plus d'une minute sans interruption est formée d'une série ininterrompue de vibrations. Quand l'orage est à l'horizon en une région déterminée, on peut *en repérer aisément la direction*. On peut même alors suivre sa marche et sa trajectoire, on peut trouver sa distance en mesurant l'intervalle de temps compris entre une décharge au téléphone et le coup de tonnerre suivant. Il n'en est plus de même, si l'on est en présence *d'un front orageux ou d'un orage très proche :* les parasites sont alors *également intenses et fréquents sur tous les azimuts*. Il n'est pas possible de déterminer de maximum. On a parfois inscrit la décharge correspondante à des *éclairs visibles*, qui donnent naturellement des inscriptions de genre *décharge;* d'autres inscriptions de ce genre correspondent à des *chutes de grêle*.

VI. *Origine des craquements.* — Les craquements et les claquements se manifestent sur les bandes d'inscription par des encoches de plus ou moins grande amplitude et plus ou moins espacées. Ils doivent correspondre à des *décharges intenses, mais très lointaines*, telles que seul le commencement de la décharge peut être inscrit ou encore à des variations brusques de potentiel de masses à grande capacité, comme des couches d'air ou de vapeur d'eau chargées, subitement entraînées dans des tourbillons, des cyclones, des mouvements violents, ce qui peut amener de violentes décharges, mais médiocrement oscillantes.

Ce qui oblige à penser que les claquements ont bien une origine lointaine, c'est le fait que souvent au-dessus de Strasbourg, où les expé-

riences furent faites, le ciel était bleu et pur, tandis que les claquements étaient violents tant en intensité qu'en fréquence.

VII. *Prévision du temps.* — De ce qui précède, il résulte qu'il est possible de fonder sur l'observation des parasites une méthode de prévision du temps.

S'il y a des décharges dans tous les azimuts, un front orageux est proche. S'il y a des décharges dans une direction déterminée, il y a un foyer orageux dans cette direction et l'on pourra probablement le suivre et déterminer la trajectoire.

S'il y a des claquements et des craquements avec maximum net dans une direction bien définie, il se produit au loin, dans cette direction, des phénomènes violents : orages, mouvements d'air ou tourbillons.

Dès que la méthode radiogoniométrique se sera répandue, elle deviendra susceptible d'apporter une contribution importante à la prévision du temps et à la marche des orages. Elle sera surtout utile dans les régions agricoles.

En particulier, M. Lacoste a établi des relations intéressantes entre la direction des maximums observés et la situation des dépressions au cours de l'été dernier.

MÉTÉOROLOGIE. — *Sur la relation existant entre les directions des dépressions et les directions des maximums des parasites atmosphériques.* Note de M. **J. Lacoste**, transmise par M. Bouty.

J'ai exécuté, au cours de l'été de 1921, des observations sur les parasites atmosphériques en employant le dispositif radiogoniométrique de l'Institut de Physique du Globe de Strasbourg :

J'ai utilisé, à cet effet, à la fois la méthode auditive au téléphone et la méthode d'inscription (oscillographe) pour procéder d'une manière rationnelle à la détermination des maximums soit d'intensité, soit de fréquence.

Des observations continues pendant plusieurs mois m'ont conduit à rattacher la fréquence des parasites dans une direction déterminée à l'existence de dépressions, dans cette direction. J'ai ainsi observé un certain nombre de faits qui m'ont conduit à proposer les lois suivantes :

1° S'il existe une dépression lointaine bien caractérisée, à isobares fermées nettement concentriques, le maximum observé est vers la région sud ou sud-est de cette dépression ; le déplacement de la direction du maximum et la variation d'intensité des parasites permettent de suivre la dépression ;

2° S'il existe une dépression dont le centre est très éloigné et dont les isobares ont une courbure moins prononcée, le maximum est encore vers la périphérie sud ou sud-est de la dépression. Il est moins nettement caractérisé que dans le cas précédent ;

3° Les dépressions secondaires, les poches barométriques, les cols barométriques *voisins* correspondent à des fronts orageux, et le maximum est difficile à déterminer : les parasites sont alors violents dans tous les azimuts ;

4° Un point orageux *voisin* donne des parasites violents dans la direction de l'orage.

Ces observations m'ont permis, ainsi que M. Rothé a pu le vérifier à différentes reprises, non seulement de suivre le déplacement des dépressions connues, mais encore de prévoir l'arrivée de nouvelles dépressions dont l'existence n'a été connue que le lendemain.

J'ai pu également établir *a posteriori* une correspondance frappante entre les observations de maximums, faites en 1920 par un autre expérimentateur, et les situations dépressionnaires.

A titre d'exemples, j'indiquerai les faits suivants :

28 *juillet.* — Matin 5^h20^m : parasites violents sur NNW. Orages vallée Moselle. — 7^h20^m : parasites en diminution ; plus d'orages en Alsace. — 15^h : maximum net SW. *La situation isobarique avait donc changé et en effet une dépression à centre Saint-Mathieu envahissait le sud-ouest de la France* (première loi : prévision d'une nouvelle dépression).

29 *juillet.* — Maximum NNW. Le centre dépressionnaire s'est déplacé sur Shields (première loi : déplacement d'une dépression).

5 *août.* — Les parasitesviolents sur tous les azimuts me font conclure à une poche barométrique voisine, aperçue plus tard sur la carte. Orages Vosges, Lorraine, Moselle (troisième loi : poche barométrique).

4 *août.* — Max. NNW. Donc nouvelle dépression lointaine.

5 *août.* — Max. NNW. Parasites plus nombreux et plus violents. La dépression s'approche (la presse annonce de nombreux orages sur l'Angleterre).

6 *août.* — Max. N. La dépression marche vers la droite, comme l'indiquera plus tard la carte.

8 *août.* — Max. N, puis NNE. La dépression envahit la Hollande et le Danemark.

9 *août.* — Max. NNE. — La dépression s'éloigne (dépression suivie par l'observation des parasites).

10 *août.* — Des parasites très violents dès le matin sur tous les azimuts me font annoncer une dépression secondaire voisine. Le soir, orages sur Strasbourg et dans la région (front orageux connu avant le tracé d'aucune carte).

17 *août.* — Dès le matin les parasites sont faibles sur tous les azimuts. A 11^h, des

parasites violents sur SW me font annoncer une nouvelle dépression. Elle ne peut pas être une poche barométrique, le maximum est trop bien déterminé. On apprendra plus tard qu'une dépression envahissait le sud-ouest de la France (origine des orages dans le Midi, annonce d'une dépression).[1]

18 *août.* — Parasites encore plus nombreux et plus violents SSW.

18 *août.* — Dépression Espagne, Golfe de Gascogne. (Les orages continuent dans le Midi).

19 *août.* — Max. WSW violents.

20 *août.* — Max. WSW. Déplacement de la dépression ci-dessus.

21 *août.* — Max. WNW. Son centre est sur le Pas de Calais. (Déplacement de la dépression; son voisinage était indiqué par l'intensité parasitaire).

26 *août.* — Dépression ancienne sur Baltique. Or le maximum trouvé dès le matin est NW-SE. Je conclus à une nouvelle dépression invisible sur la carte du 26 ou *sur la mer du Nord* ou *sur l'Adriatique.* La première hypothèse était la vraie.

27 *août.* — Les parasites NW deviennent plus intenses. La dépression trouvée se rapproche.

29 *août.* — Parasites encore intenses sur NNW, son centre est encore voisin, mais il se déplace.

30 *août.* — Max. NNE, les parasites faiblissent, la dépression atteint la Baltique.

7 *septembre.* — Nous sommes sur un vaste plateau anticyclonique. Max. de parasites sur S. Dépression Méditerranée.

8 *septembre.* — Max. SSW. La dépression envahit l'Espagne.

9 *septembre.* — Max. régions W. Tout l'Atlantique est dépressionnaire.

10 *septembre.* — Max. NW. La dépression se déplace.

11 *septembre.* — Max. N. Elle marche vers la droite.

12 *septembre.* — Deux Max. 1er NE attribué à la vieille dépression; 2e WNW. Je l'attribue à une nouvelle dépression visible plus tard sur la carte.

15 *septembre.* — Nouveau Max. SW. Poche barométrique sur Golfe de Gascogne, origine de violents orages dans le Centre les 16 et 17 septembre.

21 *septembre.* — 14^h les parasites deviennent violents snr tous les azimuts. Je conclus à une poche barométrique, voisine, vue le lendemain sur carte. Orages Alsace et NE de la France.

L'oscillographe m'a permis l'inscription d'éclairs durant souvent plus d'une seconde ; or l'inscription continue de parasites lointains, par ciel clair, montre un grand nombre de décharges dont l'inscription est comparable à celle des éclairs observés. On est ainsi amené à conclure que la plupart des parasites atmosphériques sont bien dus à des phénomènes orageux plus ou moins éloignés et se produisent fréquemment dans les régions des ciels couverts. Enfin je crois bon de signaler qu'aux derniers jours de mes observations, il m'a paru que le brouillard facilitait la transmission des parasites.

L'étude des parasites me paraît donc pouvoir apporter, dans un grand nombre de cas, une contribution nouvelle à la prévision du temps.

GÉOLOGIE. — *Sur la pluralité des appareils éruptifs du Massif Cantalien.* Note de M[lle] **Yvonne Boisse** et de M. **Pierre Marty.**

La présente Note a pour but de montrer qu'il existe dans le massif volcanique du Cantal plusieurs appareils éruptifs, ce que l'on soupçonnait déjà d'ailleurs, et de décrire sommairement les principaux de ces appareils.

On sait que ce massif volcanique est constitué par une série de déjections très variées, où dominent les andésites qui constituent les cinq sixièmes de leur masse, et que l'activité volcanique s'est terminée par l'épanchement de grandes coulées basaltiques.

Au point de vue chronologique, les premières éruptions sont contemporaines des alluvions à *Hipparion gracile*, bien connues au Puy Courny et que l'on retrouve à Joursac; elles sont ainsi d'âge pontien. Vers le milieu du complexe andésitique, à Pont-de-Gail, une faune de Mollusques d'eau douce remonte au Plaisancien. Le niveau alluvial qui couronne le complexe andésitique renferme (Capels) une flore comprise entre le Plaisancien et l'Astien. Les derniers basaltes sont ravinés par des dépôts de pentes à Hippopotames, datant du Sicilien. Enfin, un complexe fluvio-glaciaire des pentes a donné, au Bousquet, une industrie chelléenne, et celui du fond des vallées (Arpajon), une faune aurignacienne, avec Rennes et Lions des cavernes.

Dans la pensée de Poulett-Scrope, Rames et aussi de M. Marcelin Boule, auquel on doit de beaux travaux sur le Cantal, le massif volcanique offrirait une caldeira unique et plusieurs cônes éruptifs distincts. La caldeira serait le périmètre de la région filonienne, sorte de laccolithe sur lequel sont implantés divers appareils individualisés. Seul, Rames a tenté la reconstitution des anciens cônes volcaniques du Cantal.

Il en a reconnu deux, le premier situé près du Puy Mary, qu'il a dénommé le mont Albert Gaudry, le second près du Lioran, le mont Saporta. Il nous semble possible de préciser, mieux que l'a fait Rames, l'emplacement, la nature et l'âge relatif de ces deux volcans.

La voie ferrée décrit entre Vic-sur-Cère et Murat un arc de cercle à concavité tournée vers le sud-est. Tous les cours d'eau qui drainent le secteur situé au sud-est de cette ligne rayonnent autour d'un point situé dans le voisinage du Plomb du Cantal (1858^{m}), ce qui revient à dire que cette région présente la forme d'un tronc de cône. Au sommet de ce tronc de cône existe une dépression circulaire de 2000^{m} de diamètre et de 500^{m} de profondeur, le cirque des Gardes.

Du Puy Lioran, on voit toutes les coulées qui couronnent ce massif, celui du mont Saporta, s'abaisser vers sa périphérie. Un arc de basalte est resté suspendu sur le bord du cratère, ainsi que des couches de lapilli qui pendent à 35° vers le Sud-Ouest; le tout représente les débris manifestes de l'ancien piton terminal de l'appareil. D'autre

part, le trachyphonolithe s'élève dans le cratère à 1250^{m}; mais à mesnre qu'on s'éloigne de ce centre, on voit ses affleurements présenter, dans toutes les directions, des altitudes régulièrement décroissantes. Il y a donc, au fond du cratère des Gardes, un cône de trachyphonolithe pontien sur lequel s'emboîte un cône andésitique plaisancien.

Le trachy-phonolithe du massif cantalien appartient, par conséquent, en propre, au volcan mio-pliocène du mont Saporta, dont l'autonomie est mise en lumière par la topographie, la stratigraphie et la pétrographie.

De même, au nord-ouest de la voie ferrée, les cours d'eau rayonnent autour d'un point idéal situé au-dessus du centre du cirque de Mandailles, à Rudez. Ici encore existe une montagne conique creusée en son centre d'une dépression cratériforme, c'est-à-dire présentant tous les caractères d'un volcan autonome, l'Albert Gaudry de Rames.

La dépression centrale, large de 6000^{m} et profonde de 700^{m}, est jalonnée par les Puys Chavaroche, Mary, Griou, etc.; le pendage rayonnant des coulées est ici moins net que sur les pentes du mont Saporta, il est pourtant possible de le suivre, et, d'autre part, les pointements trachy-phonolithiques du fond du cirque de Mandailles et de l'entonnoir de Font-Allagnon se rattachent manifestement au grand cône de même nature du mont Saporta. Cette roche fait partie intégrante du volcan Albert Gaudry; elle appartient à son soubassement. Par contre, le basalte porphyroïde lui appartient en propre; il manque au mont Saporta.

Ainsi, en résumé, le mont Saporta est un volcan mio-pliocène, trachytique, phonolithique, andésitique et basaltique, tandis que l'Albert Gaudry est un volcan presque exclusivement pliocène, composé de projections andésitiques, de basalte porphyroïde et d'andésite. La masse de l'Albert Gaudry est environ six fois supérieure à celle du mont Saporta.

La proximité de ces deux volcans (8000^{m} au maximum) a eu pour conséquence que les coulées boueuses de l'Albert Gaudry ont en quelque sorte entouré de leurs tentacules la base du mont Saporta.

A l'époque pliocène il a dû se produire des alternances et des superpositions de coulées issues tantôt de l'un, tantôt de l'autre de ces deux appareils, les deux volcans demeurant distincts à leur sommet. Les vallées de la Cère et de l'Allagnon ont pris naissance à l'intersection des pentes des deux volcans : ce sont en effet des vallées structurales reprises par l'érosion.

Sur le bord du cratère du mont Albert Gaudry se dresse un massif phonolithique, dans lequel le Griou offre avec la Montagne Pelée une analogie signalée par M. Boule. Ce volcan est indépendant des deux autres.

Les monts Saporta et Albert Gaudry sont alignés suivant une direction armoricaine, SE-NO. Ils se trouvent sur une des plus grandes fractures de

la France centrale. Depuis Maruéjols, où elle met en contact le Jurassique inférieur avec l'Archéen, elle suit l'axe des volcans d'Aubrac, passe sous les volcans Saporta et Albert Gaudry, et, au flanc sud de ce dernier, marque l'emplacement du volcan du Griou. Celui-ci constitue le premier évent d'une traînée phonolithique qui, par la Roche-Taillade et Murat, s'étend jusqu'aux Orgues du Bort.

Il existe encore, dans le Cantal, des volcans basaltiques plus récents.

EMBRYOGÉNIE VÉGÉTALE. — *Embryogénie des Boragacées. Les derniers stades du développement de l'embryon chez le* Myosotis hispida *Schlecht.* Note de M. **René Souèges**, présentée par M. L. Guignard.

On a vu comment se sont édifiés les cinq étages, *l*, *l'*, *m*, *n*, *n'*, du proembryon à douze cellules chez le *Myosotis hispida* (¹).

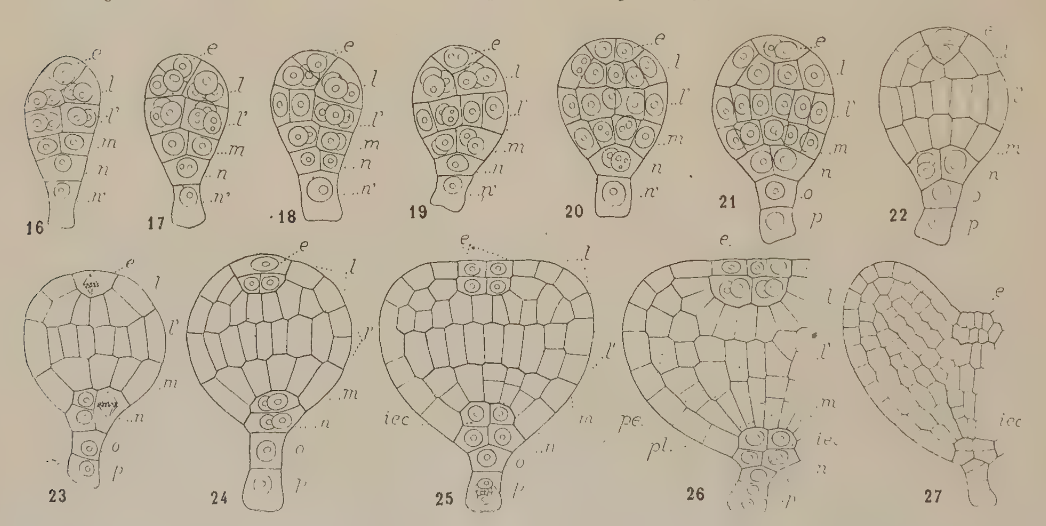


Fig. 16 à 27. *Myosotis hispida* Schlecht. — Les derniers stades du développement de l'embryon. *l*, *l'*, *m*, *n*, *n'*, les cinq étages du proembryon; *e*, épiphyse; *o* et *p*, cellules filles de *n'*; *iec*, initiales de l'écorce au sommet radiculaire; *pe*, périblème; *pl*, plérome. G. = 360; 180 pour 27.

L'étage supérieur *l* donne naissance à la partie cotylée; il se compose de quatre éléments dont l'un, *e*, occupe le sommet et les trois autres un plan légèrement inférieur. C'est la cellule sœur de *e* qui se segmente, en règle très générale, la première

(¹) R. Souèges, *Embryogénie des Boragacées. Les premiers termes du développement de l'embryon chez le* Myosotis hispida *Schlecht* (*Comptes rendus*, t. **173**, 1921, p. 726).

par une cloison verticale méridienne, pour donner deux éléments juxtaposés. Les quatre éléments que l'on remarque maintenant, à un même niveau, au-dessous de *e* (*fig.* 16), par des cloisons verticales, soit tangentielles, soit normales aux parois méridiennes, se convertissent en un plateau d'une douzaine de cellules environ. Aux dépens de ces cellules, s'érigent les deux cotylédons, les histogènes qui entrent dans leur constitution se différenciant selon les processus généraux déjà décrits chez d'autres espèces et que mettent suffisamment en relief les figures 23 à 27.

L'épiphyse, *e* (*fig.* 16 à 19), par une paroi méridienne, se sépare en deux cellules juxtaposées (*fig.* 20 et 21); celles-ci se segmentent ensuite tangentiellement (*fig.* 22 et 23) et les quatre nouveaux éléments engendrés se divisent à leur tour verticalement (*fig.* 24 et 25) de manière à donner naissance à deux groupes de quatre cellules superposées. On observe de nombreuses variations dans l'ordre des segmentations qui conduisent à la formation de ces deux groupes cellulaires, les cloisons périclines pouvant apparaître avant ou après les cloisons anticlines aux diverses étapes de ces cloisonnements. Durant la croissance des cotylédons, les cellules de ces deux tétrades se multiplient par parois verticales (*fig.* 26 et 27) et cessent bientôt de se distinguer des cellules voisines. Comme elles occupent seules l'étroite commissure cotylédonaire, c'est donc à leurs dépens que se formeront plus tard les différentes pièces du cône végétatif de la tige.

Les quatre cellules de l'étage *l'* (*fig.* 16), en se cloisonnant verticalement, donnent naissance à une assise cellulaire (*fig.* 17 à 24) qui, jusqu'au terme de la vie proembryonnaire, correspond nettement à la moitié supérieure de l'axe hypocotylé (*fig* 25). Au moment de la naissance des cotylédons, apparaissent, dans cette assise, les premières cloisons transversales et s'effacent les limites de séparation des deux étages *l'* et *m* (*fig.* 25 et 26). C'est également à cette période que la différenciation du périblème et du plérome se montre définitive dans l'axe hypocotylé.

Les deux éléments de l'étage *m* (*fig.* 16), par des cloisons méridiennes, se séparent en quatre cellules circumaxiales. Celles-ci continuent à se multiplier par des parois verticales et constituent une assise (*fig.* 20 à 24) qui correspond à la moitié inferieure de l'hypocotyle. Les cloisons transversales apparaissent dans cette assise au moment de la naissance des protubérances cotylédonaires (*fig.* 25 et 26). Les initiales du plérome au sommet radiculaire résultent de ces premières segmentations transversales des cellules adjacentes à l'axe de l'embryon. Dans la figure 27, elles sont très probablement différenciées.

L'élément *n* (*fig.* 16), par segmentations verticales méridiennes (*fig.* 18, 20, 21, 22), puis horizontales (*fig.* 23, 25), ou inversement, par divisions d'abord horizontales, puis verticales (*fig.* 24), donne naissance à deux groupes de quatre cellules superposées (*fig.* 25, 26). Les cellules du groupe supérieur sont les initiales de l'écorce au sommet radiculaire; celles du groupe inférieur constituent le rudiment central de la coiffe; elles prendront plus tard des cloisons tangentielles pour engendrer supérieurement les deux premières cellules de l'assise calyptrogène.

L'élément *n'* se divise transversalement (*fig.* 21); les deux cellules filles, *o* et *p*, se segmentent à leur tour de la même manière; la série des quatre éléments ainsi engendrés, n'offrant aucune différenciation spéciale, représente le suspenseur.

C'est aux *Nicotiana* [1] que le *Myosotis hispida* semble se rattacher le plus étroitement, au point de vue embryogénétique. Dans les deux cas, le proembryon hexacellulaire à quatre étages, *l*, *l'*, *m* et *ci*, sous la seule réserve de la direction de la paroi de segmentation dans l'étage supérieur, s'édifie de manière identique. Entre les deux formes, les différences les plus remarquables résident : 1° dans les destinées des trois étages inférieurs *l'*, *m* et *ci*; 2° dans l'individualisation très précoce, chez le *Myosotis*, d'une cellule épiphysaire qui engendre le cône végétatif de la tige.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Formation de l'anthocyane dans les fleurs de* Cobæa scandens *aux dépens des glucosides préexistants.* Note de M. **St. Jonesco**, présentée par M. Gaston Bonnier.

Dans ses premières recherches sur la formation de l'anthocyane M. Raoul Combes [2] a émis l'hypothèse que ce pigment se constitue de toutes pièces dans les organes rouges des plantes. Plus tard, se basant sur les travaux de M. E. Rosé [3], il a trouvé dans les résultats obtenus par cet auteur la confirmation de son hypothèse.

Les nombreuses analyses que j'ai faites pour déterminer la quantité des glucosides qui se trouve dans diverses plantes étiolées, utilisées pour l'étude du phénomène de « rougissement », m'ont montré une contradiction entre les résultats obtenus par M. Rosé sur les fleurs non colorées de *Cobæa scandens* et ceux que j'ai trouvé sur les plantes étiolées prises comme sujet d'études. Dans ses recherches sur les fleurs non colorées et colorées de *Cobæa scandens*, cet auteur a déterminé la quantité de sucres et de glucosides qu'elles renferment. Dans les premières fleurs, il n'a pas trouvé de glucosides préexistants, fait qui a servi d'argument à l'hypothèse du premier auteur.

Or, sans entrer dans les détails, je me bornerai à faire remarquer que

(1) R. Souèges, *Embryogénie des Solanacées; Développement de l'embryon chez les* Nicotiana (*Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 1125).

(2) Raoul Combes, *Rapport entre les composés hydrocarbonés et la formation de l'anthocyane* (*Ann. des Sciences naturelles*, 9e série, 1909).

(3) E. Rosé, *Etude des échanges gazeux et de la variation des sucres et des glucosides au cours de la formation des pigments anthocyaniques dans les fleurs de* Cobæa scandens (*Rev. gén. Bot.*, t, 26, 1914).

pour doser les glucosides, M. Rosé n'a pas essayé de précipiter ces glucosides par un réactif quelconque. Enfin, il considère comme glucosides les produits d'hydrolyse par l'acide sulfurique à l'autoclave, qu'il a trouvés, en retranchant de la totalité des sucres les autres produits que donne l'hydrolyse par l'invertine, et qui ont été dosés à part. Or rien ne prouve que ces sucres provenant de l'hydrolyse à l'autoclave proviennent de glucosides.

J'ai répété plusieurs fois les expériences de M. Rosé, et afin de rechercher la présence ou l'absence de glucosides, j'ai employé divers réactifs pour les précipiter. J'ai opéré sur des fleurs non colorées de *Cobœa scandens* qui étaient en bouton et sur celles épanouies ayant acquis une teinte verdâtre, mais sans présenter la moindre trace de pigmentation rouge (c'est-à-dire les fleurs des stades I et II de M. Rosé). J'ai aussi expérimenté sur les fleurs violettes bien pigmentées de la même espèce. J'ai préparé très rapidement un extrait alcoolique des corolles de toutes ces différentes fleurs, dans lequel j'ai obtenu par l'éther un précipité contenant déjà une partie des glucosides. Après la séparation de l'éther, j'ai passé le précipité dans l'alcool bouillant à 95° ([1]), qui dissout les glucosides. La liqueur alcoolique renfermant ces glucosides a une teinte jaune pour les fleurs non colorées et une belle teinte violette pour les fleurs pigmentées. Enfin j'ai reprécipité les glucosides de cette solution par l'acétate de plomb rigoureusement neutre. Après la séparation par filtrage et le lavage de ces corps, ils ont été passés dans l'eau sulfurique à 7 pour 100 et hydrolysés à l'autoclave à 120° pendant une heure.

Quant à la solution qui contient les glucosides non précipités au début par l'éther, elle a été traitée directement par l'acétate de plomb qui précipite ces corps, lesquels ont été traités de la même façon que les premiers et enfin hydrolysés.

Nous nous trouvons maintenant en présence de glucosides hydrolysés, obtenus par deux voies différentes : 1° les glucosides précipités par l'éther qui sont dissous dans l'alcool et enfin reprécipités par l'acétate de plomb; 2° les glucosides précipités directement par l'acétate de plomb.

Après la neutralisation de l'acide, les dosages ont été effectués d'après la méthode de Bertrand.

Les résultats que j'ai obtenus sont les suivants :

([1]) Le précipité formé par l'éther ne se dissout pas complètement dans l'alcool bouillant. Le résidu informe a été traité par l'eau sulfurique à 7 pour 100 et enfin hydrolysé. Par l'hydrolyse, ces restes donnent des sucres réducteurs qui n'ont pas été comptés dans nos résultats.

Cobæa scandens

	Fleurs non colorées.		Fleurs colorées.	
	100g subst. fraîche.	100g subst. sèche.	100g subst. fraîche.	100g subst. sèche.
1. Glucosides précipités par l'éther, dissous dans l'alcool, et reprécipités par l'acétate Pb...........	0g,235	3g,233	0g,255	5g,563
2. Glucosides précipités directement par l'acétate Pb................	0g,329	4g,502	0g,140	2g,338
Glucosides totaux.....	0g,564	7g,735	0g,395	7g,891

M. Rosé, dans les fleurs non colorées, et même dans celles déjà légèrement violacées, a toujours constaté l'absence de glucosides. On voit, au contraire, d'après les nombres précédents que les fleurs, même non colorées, renferment une notable quantité de glucosides, qui est à peu près la même chez les plantes non colorées que celle des glucosides anthocyaniques des fleurs violettes.

C'est aux dépens de ces glucosides préexistants que se forment les glucosides anthocyaniques, comme beaucoup d'auteurs l'ont déjà démontré.

Par conséquent les expériences de M. Rosé, sur lesquelles s'appuyait l'hypothèse de M. Combes, sont inexactes. Il faut donc abandonner cette manière de voir, au moins pour le cas de *Cobæa scandens*, d'autant plus que, dans les fleurs non colorées de la même plante, il existe un pigment jaunâtre, qui a été extrait et étudié par M. Kurt Noack [1]. J'ajouterai que j'ai réussi à transformer, par oxydation, ce pigment légèrement jaunâtre en un autre pigment rouge violacé, en me servant de la méthode qu'a employé M. A. Kozlowski pour oxyder un chromogène incolore de Betterave blanche à sucre, en le transformant en un pigment rouge violet.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *La greffe Soleil-Topinambour*. Note de M. **H. Colin**, présentée par M. Gaston Bonnier.

On sait combien il est facile de greffer le Soleil annuel sur le Topinambour et vice versa. Ces deux plantes cependant diffèrent profondément par leur composition chimique; le suc est *dextrogyre* tout le long de la tige et

---

[1] Kurt Noack, *Untersuchungen über den Anthocyanstoffwechsel, auf Grund der chemischen Eigenschaften der Anthocyangruppe* (*Zeitschrift f. Botanik*, 1918).

de la racine de l'*Helianthus annuus*, il est fortement *lévogyre* dans la tige, la racine et les tubercules de l'*Helianthus tuberosus*. Cette divergence tient à la nature des hydrates de carbone en solution dans le suc; le Soleil ne renferme que du saccharose et des sucres réducteurs, du glucose principalement; l'inuline et ses satellites prédominent dans le Topinambour.

La greffe a-t-elle pour effet d'atténuer ces caractères? Greffé en Topinambour, le Soleil annuel voudra-t-il tolérer les hydrocarbones lévogyres de son associé? Par ailleurs, le Topinambour greffé en Soleil et privé de son appareil assimilateur pourra-t-il encore emmagasiner de l'inuline dans ses tubercules?

Dès 1894 Wöchting [1] affirmait, sur la foi de recherches microchimiques, que quel que soit le sens de la greffe, on ne trouve jamais d'inuline dans le symbiote Soleil.

Plus récemment j'ai démontré par des analyses rigoureuses que, même au voisinage immédiat du bourrelet, le suc est invariablement dextrogyre dans le symbiote Soleil et lévogyre dans le symbiote Topinambour.

A l'intérieur du bourrelet, la discontinuité persiste; le segment de la tige de Topinambour inclus dans le Soleil renferme le même mélange d'hydrocarbones qu'une tige normale; le pouvoir rotatoire direct de ce mélange est voisin de -20; au contraire, les tissus du Soleil renflés en bourrelet contiennent seulement du saccharose et du sucre réducteur dont l'ensemble est dextrogyre.

Ces faits sont indépendants de toute théorie sur la greffe; ils démontrent qu'en passant d'un symbiote à l'autre, les hydrates de carbone subissent diverses transformations en conformité avec la physiologie propre de chaque symbiote; *le saccharose et le sucre réducteur du greffon Soleil peuvent ainsi servir de matière première à l'inuline de la tige et des tubercules du sujet Topinambour*.

M. L. Daniel se déclare dans l'impossibilité d'admettre cette dernière conclusion « Sans nier, dit-il, d'une façon absolue, la transformation du glucose du Soleil en inuline chez le Topinambour, il me semble que, si elle existe, elle est d'ordre infinitésimal. Les réserves proviennent surtout de l'hypobiote lui-même [2]..... ». D'où viendrait alors l'inuline du Topinambour greffé? Elle ne peut avoir, dit l'auteur, que deux origines : « 1° elle dérive en entier des produits lévogyres fabriqués par la chlorophylle du

---

(1) Wöchting, *Königl. preuss. Akad. der Wissensch.*, 7 juin 1894.

(2) L. Daniel, *Bulletin des Recherches et Inventions*, n° 22, août 1921, p. 475.

sujet; 2° ou bien elle provient en partie seulement de ces sources et, pour l'autre partie, du déplacement des réserves du tubercule primitif [1] ».

Dans mes expériences antérieures [2], les Topinambours furent greffés, à $0^m,80$ du sol, vers la fin de juin; je me proposais uniquement alors de déterminer le signe optique du suc dans la tige des symbiotes, de part et d'autre du bourrelet. Il me semblait impossible de mettre en doute le passage des hydrates de carbone d'un symbiote à l'autre; je ne pensais pas davantage qu'on pût exagérer le rôle de l'écorce des sujets au point de lui attribuer l'élaboration de l'inuline mise en réserve.

Cette année, j'ai greffé de très bonne heure et au ras du sol; j'ai supprimé sur les sujets feuilles et bourgeons; dépourvu de son appareil assimilateur, l'hypobiote Topinambour se trouvait donc sous la dépendance exclusive de l'épibiote Soleil. De plus, pour réduire l'apport du tubercule-mère, j'ai mis en terre de simples fragments de tubercules possédant un bourgeon vigoureux.

Tous les Topinambours ainsi préparés et greffés ont donné des tubercules remplis d'inuline.

D'où peut venir, dans ces conditions, la réserve hydrocarbonée du sujet, sinon de l'épibiote, seul en état d'assimiler?

Il n'y a pas lieu de s'étonner que les sucres dextrogyres du Soleil se condensent dans le Topinambour à l'état d'inuline. Contrairement à ce que s'imagine M. L. Daniel, la chlorophylle de l'*Helianthus tuberosus* ne fabrique pas de principes lévogyres; l'inuline est absente des cellules vertes. La feuille du Topinambour est l'une des plus riches qui soit en amidon; elle renferme, en outre, un mélange *dextrogyre* de saccharose et de sucres réducteurs [3]; à cet égard, aucune autre feuille ne ressemble davantage à la feuille de Pomme de terre; c'est pourquoi les anciens botanistes répétaient comme un axiome que le même amidon, élaboré par les feuilles, puis solubilisé et transporté, devient amidon dans les tubercules de Pomme de terre et inuline dans la tige et les tubercules de Topinambour.

---

(1) L. Daniel, *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 612.
(2) H. Colin et Y. Trouard-Riolle, *Comptes rendus*, t. 166, 1918, p. 857.
(3) H. Colin, *L'inuline chez les végétaux* (*Rev. Gén. Bot.*, t. 31, 1919).

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Formation du pigment rouge de* Beta vulgaris *par oxydation des chromogènes.* Note de M. ANTOINE KOZLOWSKI, présentée par M. Gaston Bonnier.

De nombreux travaux ont déjà été exécutés sur les anthocyanes des plantes, et bien des hypothèses ont été faites relativement aux processus chimiques qui leur donnent naissance. Des suppositions absolument contradictoires ont été émises à ce sujet; certains chercheurs ont supposé que la formation de l'anthocyane était due à des oxydations. D'autres, au contraire, ont conclu de leurs recherches, qu'elle correspondait à des phénomènes de réduction. Je présente, dans cette Note, le résultat des recherches que j'ai faites récemment sur les « Betteraves blanches à sucre » et le *Beta maritima*.

Voici la méthode que j'ai employée pour isoler les chromogènes de Betterave blanche à sucre, et le mode d'opérer est le même pour obtenir le pigment de Betterave rouge.

Les racines, coupées en petits fragments, sont traitées par l'alcool à 95° bouillant. Après refroidissement, on laisse macérer pendant 24 heures à l'obscurité; on filtre et l'on agite avec de l'éther; on obtient, au fond du vase, un liquide sirupeux qui contient les chromogènes; on rejette la partie supérieure du liquide, puis on traite le reste par l'alcool à 95°; on décante, et la substance restant au fond du vase est traitée par une petite quantité d'acide acétique; ensuite, on reprécipite de nouveau les chromogènes par l'éther et on les traite par une solution d'acétate neutre de plomb. On redissout par l'aide acétique; on filtre, et c'est dans la liqueur filtrée que se trouvent les sels formés pour la combinaison du plomb avec les chromogènes; on précipite encore une fois par l'éther et l'on sépare le plomb par l'acide sulfhydrique. On évapore le filtrat dans le vide; on lave le résidu contenant les chromogènes par l'alcool et l'éther; on obtient ainsi finalement les chromogènes isolés sous forme d'une substance jaunâtre, amorphe.

Les chromogènes de *Beta maritima* sont obtenus d'une façon à peu près semblable; seulement, au début, on emploie l'alcool à 95° et à froid. Ici, le filtrat traité par l'éther donne une substance blanche cristallisée en aiguilles. On évapore l'éther et l'alcool par distillation dans le vide; la solution qui reste, contenant une certaine proportion d'eau, est agitée avec de l'éther; on obtient alors une autre substance blanche cristallisée en forme de tablettes plus ou moins triangulaires.

Les chromogènes extraits de la Betterave blanche à sucre et de la Betterave maritime ressemblent, par certains de leurs caractères physico-chimiques, aux saponines. Ils ont un goût amer de savon; dissous dans l'eau pure ou un peu acidifiée, ils donnent une mousse très abondante et longtemps persistante; ils décolorent très vite les globules rouges du sang, mais ils ne les dissolvent pas complètement; avec l'acide sulfurique, ils donnent successivement des colorations jaune, rose, rouge et finalement violette avec un précipité violet foncé.

Ces chromogènes ne réduisent la liqueur de Fehling qu'après l'action hydrolysante à 120° d'acide sulfurique à 3 pour 100. Ils sont insolubles dans l'alcool et l'éther; de plus, les chromogènes de Betterave maritime sont difficilement solubles dans l'eau.

En produisant une réduction des chromogènes au moyen de zinc et d'acide chlorhydrique ou d'amalgame de sodium, on obtient une coloration jaunâtre. Au contraire, si l'on produit une oxydation, avec de l'acide sulfurique à 65 pour 100 et du bioxyde de manganèse en petite quantité, comme catalyseur, à une température de 40°, on obtient successivement les colorations jaune, brunâtre, rose, rouge et enfin pourpre et violette. Si cette oxydation a été effectuée avant que la substance n'ait été soumise à l'hydrolyse, le liquide coloré est trouble à cause d'un précipité floconneux; au contraire, si l'on a préalablement produit une hydrolyse et purifié cette substance, le liquide coloré est très transparent.

Les chromogènes, chauffés doucement avec de l'acide chlorhydrique à 17 pour 100 et de l'alcool amylique, donnent une substance jaune qui passe dans la couche amylique.

Si cette dernière, bien lavée et bien filtrée, est soumise à une oxydation, elle devient rouge, pourpre foncé et enfin violette. Le liquide obtenu est transparent et d'une coloration persistante. Si, au contraire, on produit une réduction de la substance jaune dissoute dans l'alcool amylique, on obtient une coloration jaunâtre.

Le pigment coloré obtenu par oxydation, chez les Betteraves blanches, présente les mêmes caractères spectroscopiques que le pigment rouge extrait des variétés rouges de Betterave. Comme les pigments naturels des Betteraves rouges, ils deviennent violets sous l'action des acides et jaunes sous celle des alcalis, et ces pigments devenus jaunes reprennent la teinte violette sous l'action des acides.

En résumé, c'est par oxydation et non par réduction que j'obtiens la transformation en pigment rouge de diverses substances incolores des

Betteraves. La similitude complète des propriétés spectroscopiques de mes produits et des pigments naturels de Betterave rouge parle en faveur de l'hypothèse que, dans la nature, la transformation des substances blanches en anthocyanes est due à la même succession de phénomènes chimiques que dans ces expériences.

Les chromogènes de Betteraves blanches que j'ai étudiées ont des propriétés qui les rapprochent beaucoup des Saponines.

CYTOLOGIE. — *Sur la formation des grains d'aleurone dans l'albumen du Ricin.* Note (1) de M. **Pierre Dangeard** fils, présentée par M. P.-A. Dangeard.

Dans une Note récente, nous avons exposé comment se comportaient les grains d'aleurone d'une graine de Pin maritime pendant la germination (2). Ceux-ci sont l'origine directe des vacuoles de la plantule et ils s'hydratent et se fusionnent auparavant ensemble en un réseau unique très finement ramifié. Il était d'un grand intérêt, au point de vue de la vie cellulaire, de savoir quelle était la contre-partie de cette évolution, c'est-à-dire de connaître l'origine des grains d'aleurone au cours de la maturation de la graine.

Actuellement, des idées assez diverses règnent en ce qui concerne la nature et l'origine de ces organites : les uns y voient des précipités albuminoïdes spéciaux, déposés dans des vacuoles, les autres (3) les considèrent comme formés par des plastides particuliers, ou protéo-plastides qui, au cours de la maturation des graines, s'accroissent, se vacuolisent et accumulent des albumines dissoutes. En réalité, comme nous allons le voir, leur mode de formation les rattache étroitement à l'appareil vacuolaire qui passe, avant leur formation, par des états tout à fait comparables à ceux que nous avons observés pendant la germination. En particulier, nous avons retrouvé pendant le développement de l'albumen du Ricin des stades réticulés du vacuome précédant la formation des grains d'aleurone.

Dans l'albumen jeune, les cellules sont très riches en eau et contiennent chacune une très grosse vacuole. Au cours de la maturation, la vacuole unique diminue de volume en même temps que le suc cellulaire se concentre; puis la vacuole se morcèle

---

(1) Séance du 2 novembre 1921.

(2) Pierre Dangeard, *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 995, et *Bull. Soc. Bot. Fr.*, 1921.

(3) Voir Chodat, *Traité de Botanique*, 1921.

par étranglement en vacuoles plus petites. Pendant cette phase de fragmentation qui se produit avec des caractères un peu différents suivant les cellules, on observe fré-



Formation des grains d'aleurone chez le Ricin; observations après coloration vitale; les vacuoles sont métachromatiques.

Fig. 1, 2, 3, 4, 5, 6, cellules de la couche externe de l'albumen. — Fig. 7, 8, 9, cellules du parenchyme de l'albumen : 1, cellule à grosse vacuole unique (on voit le début de la formation de l'huile); 2, vacuole fragmentée (l'huile est plus abondante); 3, cellule dont les vacuoles ont un contenu épais de nature colloïdale (l'huile est abondante); 4 et 5, cellules dont les vacuoles ont acquis une consistance semi-fluide et se sont anastomosées en réseaux (le cytoplasme est très riche en gouttelettes d'huile); 6, grains d'aleurone formés dans une graine un peu avant sa maturité; 7, cellule à grosse vacuole très aqueuse; 9, cellule d'albumen mûr montrant des grains d'aleurone et de l'huile; 8, état intermédiaire.

quemment dans la couche externe de l'albumen des formes du système vacuolaire très irrégulières, et des réseaux dont l'aspect varie sous l'influence des mouvements

du cytoplasme (*fig.* 4 et 5). Les globules d'huile, qui n'existaient pas au début, se forment et deviennent de plus en plus nombreux : ils restreignent d'autant la place occupée par le vacuome qui s'amincit ou se dilate par endroits suivant l'état de la cellule. Cette fragmentation qui se produit d'une façon passive et très irrégulièrement, aboutit finalement à la constitution, à l'intérieur de la cellule d'albumen, de vésicules assez régulièrement ovales et de tailles diverses dont le contenu est très épais et se colore, dans son ensemble, par le rouge neutre (*fig.* 6). Puis apparaissent dans les vacuoles des inclusions et, dans le cas général, un cristalloïde et un ou deux globoïdes. Ces inclusions ne se colorent pas par le rouge neutre qui n'est fixé que par la substance fondamentale protéique du grain (*fig.* 9). Ainsi se sont constitués les grains d'aleurone de la graine mûre qui proviennent donc de la fragmentation d'une vacuole primitivement unique, qui donne autant de grains d'aleurone dans la graine complètement formée qu'il s'est produit de vacuoles filles.

La formation des grains d'aleurone n'est donc qu'un cas particulier d'un phénomène plus général, l'évolution du système vacuolaire mis en lumière par M. P.-A. Dangeard.

Ce système peut s'hydrater ou se déshydrater, accumuler ou perdre des substances. Lorsque l'accumulation se fait en même temps que la déshydratation, on aboutit à la formation de grains d'aleurone plus ou moins volumineux ; si la quantité de métachromatine est moindre, il se forme des filaments ou de petites granulations qu'il devient difficile de distinguer dans les méristèmes des autres grains qui appartiennent soit au plastidome, soit au sphérome. Ces corps ont la même origine et se rattachent au même système : ils renferment de la métachromatine, substance qui leur donne leurs propriétés osmotiques, électives et chromatiques.

Nous insistons aussi sur le fait remarquable, qu'il y a réversibilité dans l'évolution des vacuoles et qu'il devient de plus en plus improbable, après les faits que nous apportons, que des vacuoles puissent apparaître « de novo » dans le cytoplasme. Le système vacuolaire se présente donc, après nos recherches avec une autonomie évidente.

CYTOLOGIE. — *Sur un mécanisme cinétique nouveau : La mitose syndinienne chez les Peridiniens parasites plasmodiaux.* Note [1] de M. **Edouard Chatton.**

La structure du noyau des Péridiniens libres et son mode de division ont été étudiés par Lauterborn (1895), Jollos (1910) et Borgert (1910). Au

---

(1) Séance du 2 novembre 1921.

repos le noyau est constitué par une masse de microsomes soutenus par une trame réticulaire, qui supporte aussi un ou plusieurs nucléoles. Pour la division, ces microsomes s'agencent en files ou se soudent en filaments qui constituent de véritables chromosomes. Très nombreux, ceux-ci sont disposés parallèlement en une large plaque.

Lauterborn, chez *Ceratium hirundinella*, les voit simplement se scinder transversalement en leur milieu. Borgert, chez les *Ceratium* marins, observe d'abord un clivage longitudinal des filaments, puis leur scission transver-



Phases de la mitose syndinienne. Figures demi-schématiques où trois anses chromatiques seulement sur cinq ont été représentées: 1, noyau au repos d'un plasmode dont le développement est inhibé; 2, demi-fuseau vu de profil; 3, demi-fuseau vu par son pôle; 4, séparation des deux demi-fuseaux résultant du clivage des chromosomes; 5, fuseau formé par les deux demi-fuseaux après rotation; 6, section équatoriale des anses du fuseau.

sale. Dans l'un et l'autre cas les plaques filles sont constituées par des moitiés transversales de chromosomes. Et la signification du clivage longitudinal vu par Borgert reste ainsi tout à fait énigmatique. Il ne correspondrait en rien au clivage longitudinal des chromosomes dans la métamitose, qui a pour effet la répartition entre les noyaux fils de moitiés longitudinales admises comme rigoureusement équivalentes.

Le grand nombre des chromosomes et leur tassement dans le noyau de la plupart des péridiniens, et en particulier des *Ceratium*, ne permet guère

d'analyser exactement leur structure et leur jeu dans la division. Cette étude est plus aisée chez les *Syndinium*, péridiniens plasmodiaux parasites cœlomiques des copépodes pélagiques.

Là aussi, le noyau au repos est constitué, comme chez tous les dinoflagellés, par un agrégat de micromètres, uniformément distribués autour d'un gros nucléole central. Mais cet état ne s'observe que rarement et seulement dans les plasmodes dont le développement est inhibé pour une cause quelconque, la concurrence d'un autre parasite cœlomique (microsporidie) par exemple.

A la division, les micromères s'agencent et se fusionnent d'une manière absolument constante en dix filaments qui divergent à partir d'un pôle, formant une sorte de figure en parasol, ou demi-fuseau. Dans ma monographie des péridiniens parasites (1919) j'ai considéré chacun de ces filaments comme un chromosome. C'est aussi 10 chromosomes que M. W. Huth a comptés dans les noyaux des tubes parasites des radiolaires [1].

Une étude approfondie des noyaux des *Syndinium* des copépodes m'a convaincu que chacun de ces filaments n'est qu'un demi-chromosome. Quand on examine avec attention le pôle du demi-fuseau, on voit que celui-ci n'est pas en réalité unique, mais formé de cinq sommets d'angles dont les côtés sont chacun l'un des dix filaments chromatiques. Il y a ainsi, en réalité, 5 chromosomes très longs, pliés en V très aigu, et dont le sommet est au pôle de la mitose.

A la division ces chromosomes se clivent longitudinalement sur toute leur longueur, formant 10 chromosomes en V. Tandis que 5 d'entre eux restent groupés autour du pôle primitif, les 5 autres se groupent autour d'un autre pôle, d'abord très peu distant de celui-ci, mais qui s'en écarte progressivement.

Ainsi un nouveau groupe de 5 chromosomes en parasol ou demi-fuseau, se dégage progressivement du groupe primitif. Dans certains *Syndinium*, les chromosomes clivés restent adhérents entre eux par leurs extrémités libres, autour desquelles les deux moitiés basculent comme autour d'une charnière, et finissent par se mettre en opposition. Elles forment alors un fuseau bipolaire complet, à dix filaments chromatiques agencés en cinq losanges qui se coupent en leur milieu. Mais chez d'autres espèces le clivage est complet et les deux groupes en parasol se séparent d'emblée.

---

[1] Ces tubes vus par Brandt (1905), Borgert (1909), W. Huth (1913), ont été donnés par ces auteurs comme représentant la gamétogénèse du radiolaire (*Thalassicolla*). J'ai dit ici même (*Comptes rendus*, t. **170**, 1920, p. 413) les raisons pour lesquelles je les considère comme des formations parasitaires de nature syndinienne

Ici, contrairement à ce qui a été vu par Borgert chez les *Ceratium* marins, ce sont bien les deux demi-chromosomes longitudinaux qui sont répartis entre les deux noyaux fils. Le clivage transversal n'est qu'une apparence; c'est l'achèvement du clivage longitudinal resté incomplet.

Le processus cinétique recommence à partir de ces demi-fuseaux suivant le même mécanisme et sans remaniements intercinétiques.

Il n'y a dans cette mitose, ni centres définis, ni figure achromatique. On voit à l'angle apical de chaque chromosome un point plus colorable, qui, en se confondant avec les voisins, peut donner l'illusion d'un centriole ou d'un diplosome. Mais il n'en existe pas moins un centre d'attraction commun, non figuré, et susceptible de se dédoubler.

Sans centres figurés, et sans spectre achromatique, la mitose des syndinides est plus simple que la mitose des métazoaires et des métaphytes. Elle ne le cède cependant en rien à celle-ci quant à la précision du mécanisme essentiel de la division nucléaire : la répartition égale de la chromatine.

Il est intéressant de constater, du point de vue de l'évolution de la structure et de la division nucléaire, que ce mécanisme est déjà réalisé chez des êtres aussi archaïques que les Péridiniens, et qu'il l'est indépendamment des formations achromatiques, qui apparaissent ainsi comme surajoutées.

Le schéma théoriquement imaginé par Rabl (1889), pour expliquer le jeu des chromosomes dans la prophase de la métamitose, se trouve être une excellente représentation d'un phénomène intermédiaire entre la mitose syndinienne et la métamitose.

La prophase syndinienne est en effet une prophase de Rabl dans laquelle les anses chromatiques convergent d'une manière immédiate, et sans interposition de fibres achromatiques.

Il me paraît probable qu'une étude nouvelle de la mitose des Péridiniens libres amènera à en sérier les stades autrement que ne l'a fait Borgert, et montrera qu'elle ne diffère point fondamentalement de celle des syndinides.

PALÉO-ANTHROPOLOGIE. — *Procédé pour la détermination des minéraux constituant les haches préhistoriques métalliques : emploi de l'analyse spectrale.* Note de M. **Marcel Baudouin**, présentée par M. Charles Richet.

Sur les conseils d'une personnalité scientifique qui veut bien s'intéresser à mes recherches, j'ai appliqué aux haches plates métalliques, qu'on dit être en bronze ou en cuivre préhistorique, la méthode de l'*analyse spectrale*,

pour être fixé sur la composition chimique qualitative de ces pièces anciennes.

Autrement dit, j'ai recherché de cette façon la présence ou l'absence du métal *étain* dans ces objets.

Deux analyses de cette sorte ont été pratiquées sur de la limaille obtenue par limage de deux haches originaires de la Vendée. C'est la première fois que cette méthode est utilisée en préhistoire.

Or la hache que j'ai recueillie à Notre-Dame-de-Riez et dont j'ai publié jadis la description (1) a donné par ce procédé : du cuivre, du fer et du zinc; mais *aucune trace d'étain*.

Elle est donc du type dit « hache en cuivre naturel » et classable à l'âge du cuivre.

Une petite hachette trouvée en Vendée et que j'ai décrite ultérieurement (2) a donné, au contraire, du *cuivre* et de l'*étain*.

Provisoirement, elle doit donc être classée parmi les haches en bronze, c'est-à-dire au premier âge du bronze (3). Mais une analyse chimique *quantitative* s'impose.

Certes, cette méthode ne permet pas d'estimer le pourcentage du minerai accessoire (étain) ou des minerais associés (zinc, etc.); et il est impossible de savoir, de par le spectre, s'il s'agit de bronze *pauvre* (2 à 8 pour 100 d'étain) ou de bronze *vrai* (10 à 10 pour 100 d'étain).

Mais cependant, elle dispensera de faire faire les analyses chimiques quantitatives de toutes les haches où l'absence de l'étain aura été constatée, quand on n'aura pour but que le classement de ces pièces, aux âges du cuivre ou du bronze. Elle aura, en outre, l'avantage d'empêcher la mutilation de nombreux spécimens de nos musées, c'est-à-dire leur altération par la prise métallique nécessaire jusqu'à ces temps derniers.

---

(1) MARCEL BAUDOUIN, *Les Haches plates de Vendée*. Paris, 1911, in-8°, p. 57. (Hache n° 38. *Sa densité* est de 8,57. Or, 8,57 indiquait nettement le cuivre et non le bronze.)

(2) MARCEL BAUDOUIN, *Bull. Soc. préh. franç.*, 1918, t. 15, n° 2, 2 février, p. 171.

(3) Hache n° 45, du poids de 69g. La densité étant de 8,60, il est probable que cette pièce est en bronze *très pauvre*, c'est-à-dire en réalité en *cuivre* avec un peu d'étain *naturel* associé, et partant de l'âge du cuivre, comme la première.

PHYSIOLOGIE. — *Le rôle des otolithes dans les mouvements spontanés des animaux pendant le saut et la chute.* Note de M. **F.-H. Quix**, présentée par M. Charles Richet.

J'ai réussi à éclaircir l'action des otolithes dans les réflexes ayant leur origine dans l'oreille interne.

Connaissant par des recherches anatomiques la situation topographique des otolithes dans le crâne, j'ai admis l'hypothèse, d'ailleurs très rationnelle, que chaque otolithe agit par son poids sur les cellules ciliaires de la macula.

L'excitation atteint son maximum quand la pression du poids est la plus grande et elle est zéro quand les otolithes cessent de peser sur les cellules.

En examinant, d'une part comment varie la pression exercée par chaque otolithe quand la tête tourne autour des différents axes, d'autre part les mouvements réflexes qui accompagnent cette rotation, on met en évidence la fonction de chaque otolithe.

L'appareil otolithique fonctionne dans deux plans perpendiculaires entre eux, le plan vertical médian pour les rotations autour de l'axe bitemporal et le plan frontal pour la rotation autour de l'axe oro-caudal.

Les otolithes de l'utricule des deux côtés, ou *lapilli*, fonctionnent dans le plan vertical médian comme des synergistes. La pression des otolithes sur les cellules effectue la flexion des membres, du cou et du tronc, et fait monter le pôle supérieur des yeux dans le plan médian; la disparition du poids des lapilli sur les cellules fait apparaître une forte extension des parties énumérées et abaisse les yeux dans le plan médian. Les otolithes des sacculi, ou *sagittæ*, agissent dans le plan frontal en deux sens antagonistes et font tourner le corps et les yeux dans le plan frontal (rotation des yeux autour de l'axe oro-caudal, rotation du cou et du tronc, abduction et adduction des membres). Les lapilli exercent une grande influence dans la production des mouvements automatiques accompagnant le saut et la chute libre.

Pendant le saut, le poids des otolithes change de la même manière que pendant les rotations de la tête. Quand la tête se déplace dans une direction opposée à celle de la gravitation, et c'est le cas dans la première partie d'un saut, quand le corps monte, l'augmentation du poids des lapilli exerce une forte flexion telle qu'elle est décrite plus haut. Par les réflexes des yeux

l'animal maintient l'orientation optique dans l'espace et par ceux des membres il franchit facilement un obstacle.

Dans la seconde partie du saut, quand l'animal descend, la tête se déplace dans la direction de la gravitation, le poids des otolithes disparaît, ce qui détermine une forte extension des membres et du corps et un déplacement des yeux vers le bas.

Les mouvements des yeux sont utiles pour l'orientation, et l'extension des pieds, du côu et du tronc protège le corps et l'empêche de se heurter au sol.

Les photographies instantanées des chevaux dépassant un obstacle montrent très nettement ces réflexes.

Le même réflexe des lapilli se montre encore d'une manière plus claire et plus élégante chez le chat pendant la chute libre.

Pendant la chute libre le poids des otolithes disparaît, et cela indépendamment de la situation de la tête de l'animal dans l'espace. Cette disparition entraîne une très forte extension des muscles des pattes, du cou et du tronc, et fait courber le corps de l'animal, de sorte que le centre de gravité est déplacé vers le ventre.

A cause de ce déplacement la bête chavire dans l'air, toujours dans une direction telle que le ventre et les pattes soient dirigés en bas et que l'animal arrive au sol sur les pattes en forte extension.

Le changement concomitant du poids des deux sagittæ pendant le saut et la chute n'a pas de conséquence, parce que ces deux otolithes sont des antagonistes l'une de l'autre, de sorte que l'influence d'une sagitta sur les muscles situés d'un côté quelconque est annulée par l'action de l'autre sagitta sur les mêmes muscles.

PHYSIOLOGIE PATHOLOGIQUE. — *Une nouvelle substance antianaphylactisante formaldéhyde-sulfoxylate de sodium.* Note de MM. **P. Brodin** et **P. Huchet**, présentée par M. Charles Richet.

Depuis que l'un de nous a attiré l'attention sur la possibilité d'atténuer le choc anaphylactique par l'adjonction à l'injection déchaînante d'une solution de chlorure de sodium [1], deux autres produits ont été proposés comme antianaphylactisants : l'hyposulfite de soude par MM. Lumière et

---

[1] Ch. Richet, P. Brodin et F. Saint-Girons, *De l'action immunisante du chlorure de sodium contre l'injection anaphylactique déchaînante* (thérapeutique métatrophique) (*Comptes rendus*, t. 169, 1919, p. 9).

Chevrotier [1]; le carbonate de soude, par MM. Sicard et Paraf [2]. A ces diverses substances, nous ajoutons le formaldéhyde-sulfoxylate de sodium.

Ce produit, obtenu par la combinaison de la formaldéhyde et de l'hydrosulfite de sodium a pour formule

$$CH^2OH - SO^2Na.$$

Il est stable, aisément soluble dans l'eau, à réaction neutre ou faiblement alcaline, peu toxique : nous avons pu l'injecter à des chiens et à des lapins à la dose de 1^g par kilo, sans provoquer aucun accident.

Le formaldéhyde-sulfoxylate de sodium est un des constituants du novarsénobenzol (914) qui diffère de l'arsénobenzol (606) par substitution à un de ses groupements aminés du radical CH^2OSONa.

Or, dans les essais de précipitation des sérums sanguins *in vitro*, la vitesse et l'intensité de la précipitation sont plus grandes avec l'arsénobenzol qu'avec le novarsénobenzol. De même qu'en injection intraveineuse l'arsénobenzol est plus toxique que le novarsénobenzol.

Nos essais ont été effectués chez le cobaye et chez le chien.

Tous nos animaux ont été sensibilisés avec du sérum de cheval frais, non chauffé, dépourvu de tout antiseptique, que M. Roussel (hémostyl Roussel) a mis obligeamment à notre disposition. Les cobayes ont été sensibilisés par voie intrapéritonéale; les chiens, par voie intraveineuse; l'injection déchaînante a été pratiquée directement dans le cœur chez le cobaye; dans la saphène, chez le chien, un mois environ après l'injection préparante.

Tous nos cobayes, au nombre de 22, étaient des mâles, ou des femelles non fécondées.

4 d'entre eux, pris comme témoins, ont reçu une injection déchaînante intracardiaque de 1^{cm^3} de sérum de cheval pur; ils sont morts en 3 à 4 minutes, après avoir présenté les accidents typiques du choc anaphylactique : hoquet, émission d'urines et de matières, convulsions.

4 autres ont reçu 1^{cm^3} de sérum de cheval additionné de 5 pour 100 de formaldéhyde : 2 n'ont eu aucun accident; 1 a présenté du prurit et un peu de dépression; 1 est mort au bout d'une demi-heure.

3 autres ont reçu 1^{cm^3} de sérum de cheval additionné de 15 pour 100 de formaldéhyde : 2 ont eu des accidents extrêmement légers; 1 est mort.

11 autres ont reçu 1^{cm^3} de sérum additionné de 25 pour 100 de formaldéhyde : 10 n'ont eu aucun accident; 1 est mort.

Il semble donc que, pour obtenir une protection certaine, il faille employer des concentrations assez fortes. La désensibilisation par choc atténué a bien dû se produire chez les animaux n'ayant présenté aucun accident, car l'un d'eux a pu, une

---

(1) *Comptes rendus*, t. 171, 1920, p. 741.

(2) *Société médicale des Hôpitaux*, 14 janvier 1921, p. 11, et 28 janvier 1921, p. 60.

demi-heure après, supporter sans la moindre réaction une nouvelle injection intracardiaque de 1^{cm^3} de sérum de cheval pur.

Sur nos 6 chiens, pesant de 15^{kg} à 20^{kg}, 2 ont servi de témoins et ont reçu 40^{cm^3} de sérum de cheval pur. Ils ont présenté les accidents habituels et sont morts : l'un au bout de 2 heures, l'autre en 12 heures.

Les 4 autres ont reçu la même dose de sérum de cheval, soit 40^{cm^3}, mais additionnés de 10^{g} de formaldéhyde : 3 n'ont eu aucun accident immédiat, mais seulement des vomissements passagers, 10 minutes environ après l'injection; le quatrième a présenté des selles pâteuses, mais non sanglantes, avec un certain degré d'abrutissement, mais il s'est remis ultérieurement.

Chez l'un d'eux nous avons examiné le sang prélevé au niveau de la carotide, avant et après le choc anaphylactique, et nous avons obtenu les résultats suivants :

	Globules		Poly-nucléaires pour 100.	Mono-nucléaires pour 100.	Coagulation.
	rouges.	blancs.			
Avant le choc.....	6930000	46200	85	15	normale
Après le choc.....	5850000	1800	0	100	nulle

Ces examens de sang montrent que l'emploi de la formaldéhyde, tout en atténuant considérablement les accidents nerveux provoqués par le choc, n'empêche pas cependant la production de la plupart des réactions sanguines caractéristiques de ce choc, c'est-à-dire : la chute de pression, l'incoagulabilité du sang, la leucopénie, et l'inversion de la formule leucocytaire.

Une réaction sanguine manque toutefois : la *concentration*.

Ainsi que l'un de nous l'a signalé (¹), le choc anaphylactique, en effet, s'accompagne toujours d'une concentration sanguine que l'on peut facilement mettre en évidence, soit en mesurant le rapport du plasma aux globules, soit en numérant les globules rouges par millimètre cube avant et après le choc. C'est à elle que doit être rattachée, selon toute vraisemblance, l'augmentation de l'indice réfractométrique signalée par M. Widal. Or la numération des globules rouges nous a donné, après l'emploi de la formaldéhyde, non pas une concentration sanguine, mais une dilution; nous avions déjà fait la même constatation dans nos recherches sur le NaCl et avions admis qu'il devait y avoir une relation entre les accidents nerveux du choc et la concentration sanguine qui l'accompagne.

L'absence de données plus complètes sur la toxicité de la formaldéhyde ne nous permet pas encore de dire jusqu'à quel point elle peut être utilisée en thérapeutique humaine, mais son étude expérimentale constitue une nouvelle démonstration du fait qu'il semble exister un rapport entre la concentration sanguine et le choc anaphylactique.

(¹) Ch. Richet, P. Brodin et F. Saint-Girons, *Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 369.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Sur les variations d'énergie du* Clostridium Pastorianum *comme fixateur d'azote*. Note de MM. **G. Truffaut** et **N. Bezssonnof**, présentée par M. L. Maquenne.

Dans une précédente Communication [1] nous avons montré que deux chauffages d'une terre à 100° pendant 20 minutes, répétés à 24 heures d'intervalle, diminuent le nombre des germes actifs du *Clostridium Pastorianum*. Nous avons en outre constaté que dans les tubes d'agar glucosé, ensemencés par des dilutions de terre chauffée à 100°, la fermentation butyrique est infiniment plus énergique que celle des tubes ensemencés par des dilutions de terre chauffée à 75°.

Il nous a paru intéressant de mesurer la capacité de fixation d'azote des cultures ainsi obtenues. Dans ce but nous avons ensemencé une série de fioles de bouillon [2] par des cultures provenant de tubes chauffés deux fois pendant une demi-heure à 100° ou à 75°. Après 10 jours d'incubation à 35° on a trouvé, en milligrammes par litre de bouillon, les fixations d'azote suivantes :

Cultures chauffées à 100°.........	40^{mg}
Cultures chauffées à 75°..........	21^{mg} et 29^{mg}

L'activité du microbe apparaît presque double dans le premier cas que dans le second, et le même phénomène, c'est-à-dire une fixation plus intense d'azote, se reproduit, quand, au lieu de la chaleur, on emploie pour provoquer la stérilisation partielle un agent chimique tel qu'un mélange à base de sulfure de calcium (*Sulgine* Truffaut).

Le nombre de germes introduits lors de l'ensemencement des tubes d'agar glucosé influence considérablement la fixation ultérieure d'azote dans les bouillons inoculés avec ces cultures et à ce sujet nos observations nous ont amenés à un résultat tout à fait imprévu : c'est qu'à une plus grande quantité de germes introduits par des ensemencements à faibles dilutions de terre correspond une diminution de la fixation d'azote, comme si cette terre renfermait un facteur nuisible à la fermentation butyrique, qui, présent dans les faibles dilutions, devient négligeable dans les grandes. Les expériences suivantes ne sauraient laisser aucun doute à ce sujet.

I. Deux pots furent remplis, l'un de 2^{kg} de terre normale, l'autre d'une égale quantité de la même terre, mélangée avec un produit stérilisant à base de sulfure de calcium ($6^{g},66$ par kilogramme).

---

(1) *Comptes rendus*, t. **172**, 1921, p. 1319.

(2) Peptone, $2^{g},5$; Liebig, 2^{g}; mannite, 10^{g}; sulfate de manganèse, $0^{g},004$ par litre.

Huit jours après le traitement, 10^g de chacune de ces terres furent dilués dans l'eau stérile au $\frac{1}{10\,000}$ et au $\frac{1}{100\,000}$ et deux tubes d'agar glucosé ensemencés par chaque dilution, suivant la technique déjà exposée. Après fermentation de ces tubes des fioles de bouillon (150^{cm^3}) furent ensemencées avec leur contenu et au bout de 22 jours, à 35°, les dosages d'azote ont montré qu'il s'y était produit, en milligrammes par litre, les fixations suivantes :

Terre témoin	dilution $\frac{1}{10\,000}$	62^{mg}
	dilution $\frac{1}{100\,000}$	61
Terre traitée	dilution $\frac{1}{10\,000}$	60
	dilution $\frac{1}{100\,000}$	113

Le bouillon ensemencé par une culture provenant d'une dilution 10 fois plus forte a ainsi fixé 53^{mg} d'azote de plus.

II. Cette nouvelle expérience a été entreprise en vue de savoir si l'intensification de la fixation d'azote que nous venons de constater se maintient dans les générations successives du microbe qui en est cause.

La première étant obtenue comme il vient d'être dit, la suivante a été réalisée par un second passage en tubes d'agar, puis en nouveau bouillon, de l'organisme développé dans la précédente. Les dosages d'azote ont alors accusé, par litre, les fixations suivantes :

		Premier passage.	Second passage.
Terre témoin	dilution $\frac{1}{10\,000}$	»	8^{mg}
	dilution $\frac{1}{100\,000}$	1^{mg}	24
Terre traitée	dilution $\frac{1}{10\,000}$	35	4
	dilution $\frac{1}{100\,000}$	60	25

L'organisme issu directement du premier passage en agar glucosé se montre, comme dans l'expérience I qui est ainsi vérifiée, particulièrement actif, mais cette propriété, comme on le voit, se perd dès la seconde culture : l'action stimulante de la stérilisation partielle ne s'exerce donc que sur la première génération du *Clostridium* extrait d'une terre traitée.

En ce qui concerne l'influence de la dilution, déjà au cours de l'incubation on pouvait observer une fermentation et un développement bien plus intense dans les bouillons ensemencés par les cultures provenant des dilutions de sol au $\frac{1}{100\,000}$, par rapport à ceux qui avaient été ensemencés avec des dilutions dix fois moindres.

On pourrait supposer, pour expliquer les résultats précédents, que le développement du *Clostridium* est entravé dans le cas des faibles dilutions par les espèces anaérobies facultatives qui l'accompagnent; et, en effet, en

procédant à l'isolement du *Clostridium* dans les tubes qui servent à nos expériences, nous avons constaté que les cultures en profondeur et les chauffages répétés à 75° ne suffisent pas à le séparer de ses compagnons, non plus que d'autres bactéries. Cependant il nous semble que le développement du *Clostridium* est empêché, non pas seulement par la concurrence d'autres germes, mais aussi par un phénomène analogue à celui d'Hérelle.

Nous croyons donc pouvoir tirer de nos expériences les conclusions suivantes :

1° La stérilisation partielle du sol par le sulfure de calcium augmente, non seulement le nombre des *Clostridium Pastorianum*, mais aussi leur capacité de fixer l'azote. Cette action stimulante de la stérilisation partielle se perd après cultures répétées en agar glucosé.

2° Il existe dans le sol un facteur nuisible au développement du *Clostridium* dans ses cultures artificielles. L'influence de ce facteur devient insensible quand ces cultures sont ensemencées avec des dilutions approchant de $\frac{1}{100\,000}$.

MÉDECINE EXPÉRIMENTALE. — *Affinité neurotrope et purification du virus de la vaccine.* Note de MM. C. **Levaditi** et S. **Nicolau**, présentée par M. Roux.

Nous avons montré dans une Note présentée à la Société de Biologie ([1]) (16 juillet 1921) que le virus de la vaccine pouvait se cultiver dans le cerveau du lapin et qu'après plusieurs passages exclusivement cérébraux, il conservait intégralement ses propriétés pathogènes. Calmette et Guérin ([2]) ont été les premiers à constater que la vaccine inoculée dans l'encéphale du lapin, s'y conserve au moins quatre jours. A. Marie ([3]) a vu que la même inoculation intracérébrale de pulpe vaccinale provoque la mort de l'animal en 4 à 5 jours; il lui fut possible de réaliser plusieurs passages de cerveau à cerveau. Toutefois, le germe ainsi cultivé était incapable d'engendrer la vaccine cutanée chez le lapin ([4]); il ne provoquait que la kératite, ce qui semblait montrer que le passage par le nevraxe modifiait l'affinité cutanée, tout en respectant l'affinité cornéenne.

Ayant repris ces recherches en collaboration avec M. Harvier, nous

---

([1]) Levaditi, Harvier et Nicolau, *C. R. Soc. Biol.*, t. 85, 16 juillet 1921, p. 345.
([2]) Calmette et Guérin, *Annales Institut Pasteur*, 1901, p. 161.
([3]) A. Marie, *C. R. Soc. Biol.*, 17 avril 1920.
([4]) Cette particularité nous a été communiquée par M. Marie.

avons constaté qu'il n'était pas très facile d'adapter au cerveau le virus de la vaccine, en inoculant par la voie cérébrale la pulpe vaccinale, telle qu'elle est préparée pour la vaccination humaine. Nous avons été obligés de pratiquer d'abord des inoculations testiculaires, d'après la méthode indiquée par Henseval ([1]) d'abord, par Noguchi ([2]) ensuite, et qui fut aussi utilisée par Harde ([3]) pour la culture *in vitro* du virus au contact des éléments cellulaires. La vaccine, puisée le deuxième ou le troisième jour dans un testicule atteint d'orchite vaccinale (lapin) et inoculée dans le cerveau, se montra pathogène (mort de l'animal le quatrième ou le sixième jour). Nous avons réalisé ultérieurement deux passages exclusivement cérébraux et constaté que le germe ainsi cultivé dans le cerveau conservait toutes ses propriétés initiales; il engendrait chez le lapin, non seulement la kératite, mais aussi la plus belle éruption vaccinale cutanée (procédé Calmette et Guérin).

Est-il possible de cultiver indéfiniment la vaccine pure par des passages uniquement cérébraux? Au début, cette culture s'arrêtait au deuxième ou au troisième passage, et nous étions obligés alors de recourir aux inoculations testiculaires pour faire récupérer au virus son affinité cérébrale. Mais, dans la suite, nous avons réussi à adapter d'une façon définitive le germe au tissu nerveux et de pratiquer, en de longues séries, des passages de cerveau à cerveau, de la même manière que l'on entretient sur le lapin le virus rabique fixe.

Depuis le 6 mai 1921 [date à laquelle pour la seule et unique fois, nous nous sommes servis de pulpe vaccinale ([4]) de veau], jusqu'à présent, le virus en notre possession a subi de très nombreux passages exclusivement cérébraux (plus de 50, en plusieurs séries parallèles).

Quelles sont actuellement les propriétés de ce virus vaccinal fixe? La vaccine cérébrale est absolument pure; les cultures faites sur tous les milieux restent stériles. Elle tue les lapins inoculés dans l'encéphale ($0^{cm^3},2$ d'émulsion cérébrale) en 4, 5 ou 6 jours (parfois en 24 heures) avec des symptômes de parésie; l'animal laisse tomber la tête, ses mouvements sont ralentis, il garde l'attitude qu'on lui donne. *Les propriétés kératogènes et vaccinogènes cutanées se sont conservées intactes; elles paraissent même exagérées.* En effet, à chaque passage cérébral, nous avons eu soin d'inoculer simultanément

([1]) Henseval, *Bulletin de l'Académie Royale de Médecine de Belgique*, séance du 24 septembre 1910.

([2]) Noguchi, *Journ. of experim. Med.*, t. 21, 1915, p. 539.

([3]) Harde, *Jubilé de Metchnikoff*, 1915, p. 107.

([4]) Vaccine Fasquelle.

un autre animal à la cornée, à la peau et au testicule. Chaque fois les lésions oculaires, cutanées et testiculaires sont apparues avec une intensité remarquable. *La vaccine cérébrale est virulente lorsque le virus est inoculé au lapin par la voie intra-veineuse;* l'animal montre, au bout de 3 à 4 jours, une belle *vaccine généralisée*, sans qu'il soit nécessaire de raser la peau, comme le recommandent Calmette et Guérin; l'épilage simple suffit, sans qu'il soit d'ailleurs indispensable. Cette vaccine généralisée est souvent mortelle, tandis que la vaccine cutanée et oculaire ne l'est pas toujours. La plupart des lapins inoculés à la cornée ou à la peau survivent; chez ceux qui meurent, il nous a été possible de déceler le virus dans le cerveau.

Au point de vue théorique, ces expériences montrent qu'*il est possible de conférer à l'ultravirus dermotrope de la vaccine une affinité neurotrope constante*. Cette affinité se traduit non seulement par la virulence du germe introduit dans le cerveau, mais aussi par le fait que certains lapins inoculés à la cornée meurent d'encéphalite vaccinale, et que le germe est pathogène par inoculation dans le nerf sciatique (présence de virus dans le cerveau). L'affinité neurotrope reste cependant inférieure à celle du virus qui provoque les véritables ectodermoses neurotropes (encéphalite, poliomyélite, rage).

Au point de vue pratique, *nos recherches ont permis d'obtenir un virus rigoureusement pur, doué de propriétés vaccinales remarquables, et qu'il sera sans doute possible d'utiliser dans la vaccination de l'homme*. Ce virus purifié se conserve parfaitement dans la glycérine et le cerveau qui le contient se prête bien à la préparation d'une pulpe homogène. De plus, il *détermine chez le singe une belle éruption vaccinale de la peau*, quel que soit le mode d'inoculation (scarification ou brûlure superficielle). Des essais de vaccination chez le veau seront bientôt réalisés.

A 16 heures trois quarts, l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 17 heures.

A. Lx.